

**Über ordnungsverträglich bewertete,
angeordnete Körper**

Heinz-Jörg Hüper

1977

Über ordnungsverträglich bewertete, angeordnete
Körper

D I S S E R T A T I O N

Zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von Heinz-Jörg Hüper
aus München

eingereicht im Juli 1977

1. Berichterstatter: Frau Prof. Dr. S. Prieß
2. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Wolffhardt

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Dezember 1977



INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Zusammenfassung	1
Grundlagen	3
§1 Charakterisierung maximal o-bewerteter, angeordneter Körper durch dedekindsche Schnitte	5
§2 Maximal o-bewertete Erweiterungskörper angeordneter Körper	31
§3 Zum Hahnschen Einbettungssatz für angeordnete Körper	56
§4 Zur Konstruktion maximal o-bewerteter Erweiterungskörper	62
§5 Ein Beweis des Allingschen Charakterisierungssatzes für $\mathbb{Z}_\alpha$ -Gruppen	70
Literaturverzeichnis	75

ZUSAMMENFASSUNG:

In der vorliegenden Arbeit soll zunächst untersucht werden, in welcher Weise man bei angeordneten Körpern mit ordnungsverträglicher Bewertung die Eigenschaft "maximal bewertet" durch Eigenschaften bestimmter dedekindscher Schnitte des Körpers, sog. B-Schnitte, charakterisieren kann. Dabei wird vor allem auf die Beziehung zwischen pseudokonvergenten Folgen des Körpers und diesen B-Schnitten eingegangen. Man kann einer Klasse äquivalenter pseudokonvergenter Folgen in eindeutiger Weise einen B-Schnitt zuordnen und Aussagen darüber machen, welche Eigenschaften dieser haben muß, falls die Folge Pseudolimites besitzt. Anschließend wird noch die folgende Frage behandelt: Sei L eine o -Erweiterung eines angeordneten Körpers K mit ordnungsverträglicher Bewertung γ . Weiter sei eine bezüglich γ pseudokonvergente Folge aus K gegeben, die keinen Pseudolimes in K besitzt, wie müssen dann die Elemente aus L , die Pseudolimites dieser Folge sind, bezüglich der Anordnung von L zu dem zugeordneten B-Schnitt aus K liegen?

In §2 wird zum einen die Frage behandelt, ob man maximale unmittelbare Erweiterungen eines angeordneten Körpers bezüglich zweier verschiedener ordnungsverträglicher Bewertungen o -monomorph ineinander einbetten kann. Dabei wird auch auf Fragen der Fortsetzung von Anordnungen eines ordnungsverträglich bewerteten Körpers auf seine unmittelbaren Erweiterungen eingegangen. Zum andern wird untersucht, ob man die maximale unmittelbare Erweiterung eines angeordneten Körpers K_1 in die eines angeordneten Körpers K_2 ordnungsmonomorph einbetten kann, wenn K_1 ein Unterkörper von K_2 ist, und die Anordnung sowie die ordnungsverträgliche Bewertung von K_2 die von K_1 fortsetzen.

In §3 wird, unter Anwendung von Ergebnissen aus §2, eine verallgemeinerte Form des Hahnschen Einbettungssatzes für

angeordnete Körper bewiesen, der sich auf ordnungsverträgliche Bewertungen bezieht, und der, angewandt auf die natürliche Bewertung eines angeordneten Körpers, eine Verschärfung des Hahnschen Einbettungssatzes, wie er bei P. Conrad und J. Dauns¹⁾ bewiesen wird, bedeutet.

Schließlich wird in §4 auf die Konstruktion maximal bewerteter Erweiterungskörper eingegangen und in §5 werden die Terminologie der B-Schnitte sowie einige Ergebnisse aus §1 auf angeordnete abelsche Gruppen mit natürlicher Bewertung übertragen. Hiermit kann nachfolgend ein vereinfachter Beweis eines Charakterisierungssatzes für η_α -Gruppen geführt werden²⁾.

Ich danke Frau Prof. Dr. S. Prieß für die Anregung zu dieser Arbeit und das persönliche Interesse, mit dem sie ihr Entstehen verfolgt hat. In zahlreichen Gesprächen konnte sie mir viele wertvolle Hinweise und Ratschläge geben.

Großen Dank schulde ich auch meiner Frau, sie hat mich während der Anfertigung dieser Arbeit in allem liebevoll unterstützt und mir stets Geduld und Verständnis entgegengebracht.

1) siehe Lit. [4], S. 391-393

2) siehe Lit. [1]

GRUNDLAGEN:

Unter angeordneten Mengen bzw. angeordneten algebraischen Strukturen verstehen wir im folgenden linear geordnete Mengen bzw. algebraische Strukturen. Bei letzteren werden stets die zugehörigen Verträglichkeitsbedingungen vorausgesetzt. Der Konfinalitätstyp einer angeordneten Menge M sei nach F. Hausdorff¹⁾ die eindeutig bestimmte, reguläre Ordinalzahl, welche die kleinste der mit M konfinalen Ordinalzahlen ist. Der Koinitialitätstyp von M sei als der Konfinalitätstyp der zu M dual geordneten Menge M^* definiert. Mit dem Koinitialitätstyp einer angeordneten Gruppe ist jedoch der Koinitialitätstyp des Positivbereiches $G^+ := \{g \in G : g > 0\}$ von G gemeint.

Wir werden im folgenden einige Begriffe und Sätze aus der Bewertungstheorie benötigen. In der Terminologie werden wir uns hierbei an O.F.G. Schilling²⁾ anlehnen. Γ sei stets eine angeordnete, additiv geschriebene abelsche Gruppe. Eine Bewertung γ eines Körpers K mit der Wertegruppe Γ_γ ist eine surjektive Abbildung γ von K auf $\Gamma_\gamma \cup \{\infty\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$1.) \gamma(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$$

$$2.) \gamma(ab) = \gamma(a) + \gamma(b) \text{ für alle } a, b \text{ aus } K$$

$$3.) \gamma(a+b) \geq \min\{\gamma(a), \gamma(b)\} \text{ für alle } a, b \text{ aus } K.$$

Dabei sei $\gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty$ und $\gamma < \infty$ für alle $\gamma \in \Gamma_\gamma$.

Wir nennen die Bewertung γ eines angeordneten Körpers K "ordnungsverträglich", falls aus $|a| \leq |b|$ ($a, b \in K$) stets $\gamma(a) \geq \gamma(b)$ folgt (K nennen wir in diesem Fall o-bewertet). Zwei Bewertungen eines Körpers K heißen äquivalent, wenn es einen o-Isomorphismus ψ von Γ auf Γ' gibt, so daß für alle $a \in K$ gilt: $\gamma'(a) = \psi(\gamma(a))$. Der Ring $O_\gamma := \{a \in K : \gamma(a) \geq 0\}$ ist der zu γ gehörige Bewertungsring. $P_\gamma := \{a \in K : \gamma(a) > 0\}$ ist ein maximales Ideal in O_γ und $\mathbb{K}_\gamma := O_\gamma/P_\gamma$ heißt der Restklassenkörper der Bewertung γ .

1) siehe Lit. [5], Seite 132

2) siehe Lit. [12]

Eine Erweiterung L von K (K sei ein mit $\mathcal{V}$ bewerteter Körper) heißt "unmittelbar", wenn die Bewertung $\mathcal{V}$ von K auf L fortgesetzt wird, und hierbei die Wertegruppe $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ sowie der Restklassenkörper $\mathcal{K}_{\mathcal{V}}$ unverändert bleiben. Bei letzterem ist hierbei gemeint, daß die Abbildung f von $\mathcal{K}_{\mathcal{V}}$ in $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ mit $f(a+P_{\mathcal{V}}(K)) = a+P_{\mathcal{V}}(L)$ ein Isomorphismus sein muß. Besitzt ein bewerteter Körper keine echte unmittelbare Erweiterung, so nennen wir ihn "maximal bewertet". Zu jedem bewerteten Körper existiert eine maximal bewertete Erweiterung¹⁾.

Sei K ein Körper und $\mathcal{V}$ eine Bewertung auf K . Ist ξ eine Limesordinalzahl, so heißt eine Folge $(a_{\xi})_{\xi < \xi}$, mit $a_{\xi} \in K$ für alle $\xi < \xi$, "pseudokonvergent", wenn für alle Ordinalzahlen δ, γ, μ mit $\delta < \gamma < \mu < \xi$ die Ungleichung $\mathcal{V}(a_{\gamma} - a_{\delta}) < \mathcal{V}(a_{\mu} - a_{\gamma})$ gilt. Aus dieser Definition folgt, daß für alle δ, τ mit $\delta < \tau < \xi$ gilt:

$$\mathcal{V}(a_{\tau} - a_{\delta}) = \mathcal{V}(a_{\delta+1} - a_{\delta}) =: p_{\delta}.$$

Ein Element g aus K heißt "Pseudolimes" von $(a_{\xi})_{\xi < \xi}$, wenn für alle $\delta < \xi$ gilt: $\mathcal{V}(a_{\delta} - g) = p_{\delta}$. Nennt man die Menge $B := \{a \in K : \mathcal{V}(a) > p_{\delta} \wedge \delta < \xi\}$ die "Breite" von $(a_{\xi})_{\xi < \xi}$, und ist g ein Pseudolimes dieser pseudokonvergenten Folge, so kann man zeigen, daß $g+B$ ($:= \{g+b : b \in B\}$) genau die Menge der Elemente aus K ist, die Pseudolimites von $(a_{\xi})_{\xi < \xi}$ sind. Jeder Breite B kann man in $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ die Teilmenge $\mathcal{V}(B) := \{\gamma \in \mathcal{T}_{\mathcal{V}} : \forall b \in B: \mathcal{V}(b) = \gamma\}$ zuordnen. Wie leicht einzusehen ist, bildet diese Menge eine obere Klasse in $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$, und es gilt sogar: $B = \{a \in K : \mathcal{V}(a) \in \mathcal{V}(B)\}$.

Eine wichtige Beziehung zwischen "maximal bewertet" und "Pseudokonvergenz" hat I. Kaplansky²⁾ gezeigt: Ein Körper K ist genau dann maximal bewertet, wenn jede pseudokonvergente Folge aus K einen Pseudolimes in K besitzt.

Im folgenden werden wir uns mit angeordneten Körpern und deren "ordnungsverträglichen" Bewertungen beschäftigen. Hierbei sei stets vorausgesetzt, daß die betrachteten Bewertungen nicht trivial sind ($\mathcal{T}_{\mathcal{V}} \neq \{0\}$)!

¹⁾ siehe Lit. [8], Seite 191, Satz 24

²⁾ siehe Lit. [6], Seite 309, Theorem 4

§1 CHARAKTERISIERUNG MAXIMAL O-BEWERTETER, ANGEORDNETER KÖRPER DURCH DEDEKINDSCHE SCHNITTE.

Teilt man einen angeordneten Körper K durch die Äquivalenzrelation

$$aRb :\Leftrightarrow \forall n, m \in \mathbb{N} : n|a| \geq |b| \text{ und } m|b| \geq |a|$$

in "archimedische Klassen" ein, und bezeichnet man die Äquivalenzklasse von a mit $[a]$, so kann man die Menge der archimedischen Klassen $[K]$ von K durch die Relation

$$[a] < [b] :\Leftrightarrow |a| > n|b| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

anordnen. Mit $[a] + [b] := [ab]$ wird auf $[K] \setminus \{[0]\}$ eine Addition erklärt, mit der $([K] \setminus \{[0]\}, +, \leq)$ eine angeordnete abelsche Gruppe ist.

Wir definieren nun V als die Abbildung von K auf $[K]$, die jedem Element a aus K ($a \neq 0$) seine archimedische Klasse $[a]$ und der 0 das Element $\alpha := [0]$ zuordnet. V ist eine ordnungsverträgliche Bewertung von K mit Wertegruppe $T_V := [K] \setminus \{[0]\}$, sie heißt die "natürliche Bewertung" von K . Im folgenden schreiben wir stets T statt T_V .

Ist γ eine beliebige ordnungsverträgliche Bewertung von K , so gilt wegen $\gamma(a+b) \geq \min\{\gamma(a), \gamma(b)\}$ für alle ganzen Zahlen n und für jedes Element a aus K : $\gamma(na) = \gamma(a)$. Also folgt aus $V(a) = V(b)$ stets $\gamma(a) = \gamma(b)$. Damit ist die Abbildung ψ von T auf T_γ mit $\psi(V(a)) := \gamma(a)$ wohldefiniert und ist, wie sich leicht nachweisen läßt, ein o -Gruppenepimorphismus. Mit Δ_γ werde der zugehörige Kern bezeichnet, d.h.:

$$\Delta_\gamma := \{\gamma \in T : \forall a \in K \text{ mit: } V(a) = \gamma \wedge \gamma(a) = 0\};$$

somit ist T_γ o -isomorph zur Faktorgruppe T/Δ_γ . Wir wollen daher im folgenden T_γ mit T/Δ_γ identifizieren. Ist umgekehrt Δ eine konvexe Untergruppe von T und die Abbildung γ von K auf T/Δ durch $\gamma(a) := V(a) + \Delta$ definiert, so ist γ eine ordnungsverträgliche Bewertung von K mit Wertegruppe T/Δ . Identifiziert man äquivalente, ordnungsverträgliche Bewertungen des angeordneten Körpers K , so erhält man damit eine eindeutige Beziehung zwischen den ordnungsverträg-

lichen Bewertungen und den konvexen Untergruppen von $\mathbb{T}$.

Sind γ_1 und γ_2 ordnungsverträgliche Bewertungen desselben angeordneten Körpers K , so heißt γ_1 "feiner" als γ_2 (Bezeichnung: $\gamma_1 \prec \gamma_2$), bzw. γ_2 "gröber" als γ_1 , falls aus $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ stets $\gamma_2(a) = \gamma_2(b)$ folgt; nach obigem ist dies jedoch gleichbedeutend damit, daß Δ_{γ_1} Teilmenge von Δ_{γ_2} ist. Damit kann man zeigen:

(1.1) Bemerkung:

Identifiziert man äquivalente, ordnungsverträgliche Bewertungen eines angeordneten Körpers K , so ist die Menge der ordnungsverträglichen Bewertungen von K durch " $\prec$ " angeordnet. Ihr kleinstes Element ist die natürliche Bewertung v .

Beweis:

Sind γ und γ' ordnungsverträgliche Bewertungen von K und $\mathbb{T}_\gamma = \mathbb{T}/\Delta_\gamma$ bzw. $\mathbb{T}_{\gamma'} = \mathbb{T}/\Delta_{\gamma'}$ ihre Wertegruppen, so sind Δ_γ und $\Delta_{\gamma'}$, als Kerne von $\mathcal{O}$ -Homomorphismen, konvexe Untergruppen von $\mathbb{T}$. Damit ist aber Δ_γ Teilmenge von $\Delta_{\gamma'}$ oder umgekehrt. Folglich ist γ mit γ' bezüglich " $\prec$ " vergleichbar.

Weitere einfache Aussagen beziehen sich auf die Größenbeziehungen in den Wertegruppen verschiedener ordnungsverträglicher Bewertungen:

(1.2) Bemerkung:

γ_1 und γ_2 seien ordnungsverträgliche Bewertungen des angeordneten Körpers K . Ist $\gamma_1 \prec \gamma_2$, so gilt:

$$(a) \quad \gamma_2(a) < \gamma_2(b) \Rightarrow \gamma_1(a) < \gamma_1(b)$$

$$(b) \quad \gamma_1(a) < \gamma_1(b) \Rightarrow \gamma_2(a) \leq \gamma_2(b).$$

Beweis:

Zu (a): Nehmen wir an, es sei $\gamma_1(a) \geq \gamma_1(b)$, so folgt für den Fall $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$, wegen $\gamma_1 \prec \gamma_2$, sofort der Widerspruch $\gamma_2(a) = \gamma_2(b)$. Ist aber $\gamma_1(a) > \gamma_1(b)$, so erhält man

mit $\gamma_1(a+b) = \gamma_1(b)$ und $\gamma_2(a+b) = \gamma_2(a)$ einen Widerspruch zu $\gamma_1 < \gamma_2$.

Zu (b): Angenommen, es sei $\gamma_2(a) > \gamma_2(b)$, so folgt: $\gamma_2(a+b) = \gamma_2(b)$, was zusammen mit $\gamma_1(a+b) = \gamma_1(a)$ wiederum im Widerspruch zu $\gamma_1 < \gamma_2$ steht.

Offensichtlich ist die Aussage (a) sogar äquivalent mit $\gamma_1 < \gamma_2$. Beziehen wir im folgenden "<" auf allgemeine Bewertungen eines Körpers, so geschieht dies daher im Sinne von Bemerkung (1.2)(a).

Wir wollen nun spezielle Untergruppen der additiven Struktur ordnungsverträglich bewerteter, angeordneter Körper untersuchen. Hierzu definieren wir:

(1.3) Definition:

Ist K ein angeordneter, mit γ ordnungsverträglich bewerteter Körper, so heißt eine Untergruppe B von $(K, +)$ eine " γ -Untergruppe" $\Leftrightarrow$

(1) Es gibt eine obere Klasse M in $T_\gamma \cup \{\infty\}$ mit

$$B = \{a \in K : \gamma(a) \in M\};$$

(2) der Konfinalitätstyp von $T_\gamma \setminus M$ ist ungleich 1.

(1.4) Lemma:

Seien γ_1, γ_2 zwei ordnungsverträgliche Bewertungen des angeordneten Körpers K . Ist $\gamma_1 < \gamma_2$, so gilt: Ist B eine T_{γ_2} -Untergruppe von $(K, +)$, dann ist B auch eine T_{γ_1} -Untergruppe von $(K, +)$.

Beweis:

Es sei B eine T_{γ_2} -Untergruppe von $(K, +)$ und $M_2 := \gamma_2(B)$ die zugehörige obere Klasse in $T_{\gamma_2} = T/\Delta_{\gamma_2}$. $M_1 \subseteq T_{\gamma_1} = T/\Delta_{\gamma_1}$ sei durch $M_1 := \{\bar{\gamma} \in T/\Delta_{\gamma_1} : \forall \gamma \in T : \bar{\gamma} = \gamma + \Delta_{\gamma_1} \wedge \gamma + \Delta_{\gamma_2} \in M_2\}$ definiert. Da γ_1 feiner als γ_2 ist und deswegen keine Elemente γ_1, γ_2 existieren, für die einerseits $\gamma_1 + \Delta_{\gamma_1} = \gamma_2 + \Delta_{\gamma_1}$, aber andererseits $\gamma_1 + \Delta_{\gamma_2} \neq \gamma_2 + \Delta_{\gamma_2}$ ist, folgt aus der Definition von M_1 : M_1 ist eine obere Klasse in T_{γ_1} und der Konfinalitätstyp von $T_{\gamma_1} \setminus M_1$ ist ungleich 1.

tätstyp von $T_{f_1} \setminus M_1$ ist größer oder gleich dem von $T_{f_2} \setminus M_2$ und somit ungleich 1. Da aber offensichtlich $f_1(B) = M_1$ ist, ist B auch eine T_{f_1} -Untergruppe von $(K, +)$.

(1.5) Folgerung:

- (a) Jede T_f -Untergruppe von $(K, +)$ ist auch eine T_V -Untergruppe, d.h. insbesondere eine konvexe Untergruppe von $(K, +)$.
- (b) Ist B eine T_f -Untergruppe, so ist die additive Faktorgruppe K/B eine angeordnete abelsche Gruppe ohne kleinstes positives Element.

Beweis:

Zu (a): Folgt aus Lemma (1.4) für $f_1 = V$ und $f_2 = f$.

Zu (b): Da B nach (a) konvex in K ist, wird durch die Anordnung von K eine Anordnung auf K/B induziert. Angenommen, $1+B$ wäre das kleinste positive Element in K/B . Dann ist in K $1 > B$ (d.h.: $1 > b \wedge b \in B$), und für jedes $1' \in K$ mit $1 > 1' > B$ gilt: $(1-1') \in B$. Also ist $f(1') = f(1'-1+1) = \min\{f(1'-1), f(1)\} = f(1)$, und daher ist $f(1)$ das größte Element von $T_f \setminus f(B)$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Voraussetzung: B ist T_f -Untergruppe.

Von einem "dedekindschen Schnitt" in einer angeordneten, algebraischen Struktur wollen wir verlangen, daß seine untere Klasse kein größtes Element besitzen soll. Wir sagen, ein Element t "bestimmt" den dedekindschen Schnitt (S,D), falls t das kleinste Element der oberen Klasse D ist.

Ein dedekindscher Schnitt (S,D) einer angeordneten Gruppe G wird nach R. Baer¹⁾ "eigentlich" genannt, wenn für jedes $g \in G$, $g > 0$, ein $s \in S$ und ein $d \in D$ existiert, so daß gilt: $(d-s) < g$. Dieser Begriff des eigentlichen dedekindschen Schnittes soll nun in einer Weise verallgemeinert werden, die es erlaubt, ihn in Zusammenhang mit pseudokonvergenten Folgen zu bringen. Hierzu definieren wir:

¹⁾ siehe Lit. [3], Seite 172

(1.6) Definition:

A) Es sei K ein angeordneter Körper mit einer ordnungsverträglichen Bewertung γ . Ein dedekindscher Schnitt (S, D) in K heißt "B-Schnitt" bezüglich γ : $\Leftrightarrow$

- 1) B ist T_γ -Untergruppe
- 2) $S+B = S^1$) (gleichbedeutend mit $D+B = D$)
- 3) $\bigwedge s \in S \bigvee k \in K, k > B$ mit $(s+k) \in S$.

B) Ein B-Schnitt (S, D) in K heißt dann "B-eigentlich" : $\Leftrightarrow \bigwedge k \in K, k > B \bigvee s \in S, d \in D$ mit $(d-s) < k$
(d.h.: $B < (d-s) < k$).

Auf den Zusatz "bezüglich γ " wird im folgenden verzichtet, wenn die zugrunde gelegte Bewertung γ eindeutig aus dem Zusammenhang zuzuordnen ist.

Bei gleichen Voraussetzungen wie in obiger Definition gilt:

(1.7) Lemma:

π sei der kanonische Gruppenepimorphismus (bezüglich "+") von K auf K/B . Dann gilt:

A) Der dedekindsche Schnitt (S, D) in K ist dann und nur dann ein B-Schnitt bezüglich γ , wenn B T_γ -Untergruppe und (S', D') für $S' = \pi(S)$ bzw. $D' = \pi(D)$ ein dedekindscher Schnitt in der angeordneten Gruppe K/B ist.

B) Ein B-Schnitt (S, D) ist dann und nur dann B-eigentlich, wenn (S', D') ein eigentlicher dedekindscher Schnitt ist.

Beweis:

Zu A): Sei (S, D) B-Schnitt in K . Dann ist $S' = \{a+B : a \in S\}$ und $D' = \{a+B : a \in D\}$. Da $S \neq \emptyset \neq D$ ist, muß auch $S' \neq \emptyset \neq D'$ sein. Aus $S+B = S$ folgt $D+B = D$, und somit ist $S' \cap D' = \emptyset$, also $S' < D'$. Andererseits ist, wegen $S \cup D = K$, auch $S' \cup D' = K/B$. Die Bedingung 3) aus Definition (1.6)A) besagt aber

1) d.h.: $s \in S, b \in B \Rightarrow (s+b) \in S$

in K lediglich, daß S' kein größtes Element besitzt. Damit ist (S', D') ein dedekindscher Schnitt in K/B .

Ist umgekehrt B eine $T_{\mathcal{V}}$ -Untergruppe und (S', D') ein dedekindscher Schnitt in K/B , so bezeichnen wir mit S bzw. D die Urbilder von S' bzw. D' bezüglich $\mathcal{V}$. Damit ist aber $S = \{a \in K : a+B \in S'\}$ sowie $D = \{a \in K : a+B \in D'\}$ und daher $S+B = S$. Insbesondere ist $S \neq \emptyset \neq D$, $S \cap D = \emptyset$, $S < D$ und $S \cup D = K$ und folglich (S, D) ein dedekindscher Schnitt in K . Da zudem S' kein größtes Element besitzt, ist auch die Bedingung 3) der Definition (1.6) A) erfüllt; also ist (S, D) ein B-Schnitt in K .

Zu B): Sei (S, D) ein B-eigentlicher B-Schnitt in K , und geben wir ein Element $k+B > 0+B$ aus K/B vor. Dann ist $k > B$ und es gibt Elemente $s \in S$ und $d \in D$ mit $(d-s) < k$. Folglich ist $(d-s)+B = (d+B)-(s+B) \leq k+B$, und da, nach Folgerung (1.5)(b), K/B kein kleinstes positives Element besitzt, gibt es sogar Elemente $s \in S$ und $d \in D$ mit $(d+B)-(s+B) < k+B$. Also ist (S', D') ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K/B .

Sei nun ein eigentlicher dedekindscher Schnitt (S', D') in K/B gegeben (B sei $T_{\mathcal{V}}$ -Untergruppe). S und D definieren wir wieder als die Urbilder von S' und D' bezüglich π . Für ein $k \in K$, $k > B$ ist dann auch $k+B > 0+B$ und es gibt Elemente $s+B \in S'$ und $d+B \in D'$ mit $(d+B)-(s+B) < k+B$. Wegen $(d+B)-(s+B) = (d-s)+B$ gilt in K insbesondere: $(d-s) < k$, d.h.: (S, D) ist eigentlich.

(1.8) Bemerkung:

Sind $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ ordnungsverträgliche Bewertungen des angeordneten Körpers K mit $\mathcal{V}_1 \prec \mathcal{V}_2$, sowie (S, D) ein B-eigentlicher B-Schnitt bezüglich $\mathcal{V}_2$, so ist er dies auch bezüglich $\mathcal{V}_1$.

Beweis:

Nach Lemma (1.4) ist B auch $T_{\mathcal{V}_1}$ -Untergruppe von $(K, +)$, und aus Definition (1.6) A) und B) folgt damit sofort: (S, D) ist B-eigentlicher B-Schnitt bezüglich $\mathcal{V}_1$.

Für einen Körper K mit ordnungsverträglicher Bewertung γ definieren wir nun:

(1.9) Definition:

A) Ein B-eigentlicher B-Schnitt (S, D) heißt "frei"
 $\Leftrightarrow \bigwedge d \in D \quad \bigvee k \in K, k > B \text{ mit: } (d-k) \in D.$

B) $g \in K$ wird "definierendes Element" des B-Schnittes (S, D) genannt $\Leftrightarrow$

$$g \in D \wedge \bigwedge d \in D \quad \bigvee b \in B \text{ mit: } (g+b) \leq d.$$

(1.10) Folgerung:

Ist (S, D) ein B-eigentlicher B-Schnitt in K und $S' = \pi(S)$ bzw. $D' = \pi(D)$, so gilt:

A) (S, D) ist dann und nur dann frei, wenn D' kein kleinstes Element besitzt (d.h., wenn (S', D') von keinem Element aus K/B bestimmt wird).

B) $g \in K$ ist dann und nur dann definierendes Element von (S, D) , wenn $g+B$ den dedekindschen Schnitt (S', D') in K/B bestimmt.

Diese Aussagen folgen direkt aus Definition (1.9) A) und B), und wir erhalten weiter:

(1.11) Folgerung:

Ist (S, D) ein B-eigentlicher B-Schnitt in K und $0 \in K$ kein definierendes Element von (S, D) , so bestimmt (S, D) eindeutig ein $\gamma \in \Gamma_\gamma$, $\gamma = \gamma_{(S, D)}$, so daß alle Elemente eines Endstückes von S und eines Anfangsstückes von D bezüglich γ denselben Wert γ annehmen.

Nach (1.10) sind dies genau die B-Schnitte (S, D) , deren Bilder (S', D') in K/B nicht von $0+B$ bestimmt werden.

Beweis von (1.11):

Nehmen wir an, unsere Aussage stimmt für ein (S, D) nicht. Dann existiert ein Endstück S^* von S und ein Anfangsstück D^* von D , so daß für alle $s \in S^*$ und $d \in D^*$ $\gamma(s) \neq \gamma(d)$ ist.

Insbesondere ist entweder $\mathcal{V}(S^*) < \mathcal{V}(D^*)$ oder $\mathcal{V}(D^*) > \mathcal{V}(S^*)$. Sei $\mathcal{V}(s) > \mathcal{V}(d)$ für alle $s \in S^*$ und $d \in D^*$; dann gilt: $\mathcal{V}(d-s) = \min\{\mathcal{V}(s), \mathcal{V}(d)\} = \mathcal{V}(d)$. Da aber nach Voraussetzung (S, D) B-eigentlich ist, folgt damit, daß für jedes $d \in \mathcal{T}_\mathcal{V}$ mit $\mathcal{V}(d) < \mathcal{V}(B)$ ein $d \in D$ mit $\mathcal{V}(d) > d$ existiert. Mit anderen Worten: Für jedes $k \in K$, $k > B$ gibt es ein $d \in D$ mit $d < k$. Da andererseits aus $\mathcal{V}(S^*) < \mathcal{V}(D^*)$ und der Ordnungsverträglichkeit von $\mathcal{V}$ folgt, daß $0 \in S$ ist, muß B ein Endstück von S sein; dies steht jedoch im Widerspruch zur Definition des B-Schnittes. Ist $\mathcal{V}(S^*) > \mathcal{V}(D^*)$, so erhält man analog die Aussage: B ist ein Anfangsstück von D . Damit wäre aber, im Widerspruch zur Annahme, $0 \in K$ ein definierendes Element von (S, D) .

(1.12) Bemerkung:

A) Ist (S, D) ein B-Schnitt in K und B' eine $\mathcal{T}_\mathcal{V}$ -Untergruppe von K mit $B' \subseteq B$, so ist (S, D) auch ein B' -Schnitt.

B) Ist (S, D) ein B-eigentlicher B-Schnitt und B^* eine $\mathcal{T}_\mathcal{V}$ -Untergruppe von K mit $B^* \not\subseteq B$, so ist (S, D) kein B^* -Schnitt!

Beweis:

Die Aussage A) folgt direkt aus der Definition des B-Schnittes. Aus den Voraussetzungen von B) folgt die Existenz eines Elementes $b^* \in B^* \setminus B$ mit $b^* > 0$. Damit ist $b^* > B$, und wegen der B-Eigentlichkeit von (S, D) gibt es ein $s \in S$ und ein $d \in D$ mit $(d-s) < b^*$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Definition (1.6), Bedingung 2): $S+B^* = S$. Folglich ist (S, D) kein B^* -Schnitt.

Es sei im folgenden K stets ein angeordneter Körper und $\mathcal{V}$ eine ordnungsverträgliche Bewertung auf K . Wie schon bemerkt, kann man einer pseudokonvergenten Folge $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ aus K die Breite $B := \{a \in K : \mathcal{V}(a) > p_\zeta = \mathcal{V}(a_{\zeta+1} - a_\zeta) \wedge d < \zeta\}$ zuordnen. Die Ordinalzahl ζ nennt man hierbei die "Länge" von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$. Da, wie man leicht sieht, für jede Ordinalzahl λ , die mit ζ

konfimal ist, $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ ebenfalls pseudokonvergent ist, und zwar mit gleicher Breite B und denselben Pseudolimites, wollen wir in Zukunft von einer pseudokonvergenten Folge stets verlangen, daß ihre Länge ζ eine reguläre Ordinalzahl ist.

Weiter ist die Breite einer bezüglich $\mathcal{P}$ pseudokonvergenten Folge offensichtlich eine $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ -Untergruppe (ihre zugehörige obere Klasse in $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ ist $M = \{\gamma \in \mathcal{T}_\mathcal{P} : \gamma > p_\delta \wedge \delta < \zeta\}$, und da $(p_\delta)_{\delta < \zeta}$ in $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ eine streng monoton steigende Folge ist, gilt auch Bedingung 2) aus Definition (1.3)). Also ist K/B bezüglich "+" eine angeordnete abelsche Gruppe ohne kleinstes positives Element. Folglich ist die durch die Anordnung von K/B induzierte Ordnungstopologie auf K/B nicht diskret und hausdorffsch. Insbesondere ist K/B mit dieser Topologie eine topologische Gruppe und als solche ein uniformer Raum. In K/B können also Cauchyfolgen definiert werden; verlangt man von diesen ebenfalls, daß ihre Länge λ regulär sein soll, so haben sämtliche echten (d.h. nichtkonstanten) Cauchyfolgen in K/B dieselbe Länge; d.h. zu einer beliebigen Cauchyfolge existiert stets eine Teilfolge der Länge λ wobei λ der Koinitialitätstyp der angeordneten Gruppe K/B ist!

(1.13) Bemerkung:

Ist $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine pseudokonvergente Folge in K mit Breite B , so ist die Folge $(a_\xi + B)_{\xi < \zeta}$ eine Cauchyfolge in K/B .

Beweis:

Es ist zu zeigen, daß zu jedem $k+B > 0+B$ ein $\eta < \zeta$ existiert, so daß für alle τ, τ' mit $\eta < \tau < \tau' < \zeta$ gilt: $|a_\tau - a_{\tau'}| + B < k+B$. Sei $k+B > 0+B$ gegeben. Da K/B kein kleinstes positives Element besitzt, gibt es ein $k'+B$ mit $0+B < k'+B < k+B$. Es sei $\delta = \mathcal{I}(k') < \mathcal{I}(B)$; da $(p_\xi)_{\xi < \zeta}$ mit $\mathcal{T}_\mathcal{P} \setminus \mathcal{I}(B)$ konfimal ist, gibt es ein p_η mit: $\delta < p_\eta < \mathcal{I}(B)$. Nach der Definition von p_η gilt

aber: Für alle τ, τ' mit $\eta < \tau < \tau' < \xi$ ist $\varphi(a_{\tau'} - a_{\tau}) > \varphi(a_{\tau'} - a_{\eta}) = \varphi(a_{\eta+1} - a_{\eta}) = p_{\eta} > \delta$. Da φ ordnungsverträglich ist, folgt hiermit: Für alle τ, τ' mit $\eta < \tau < \tau' < \xi$ ist $|a_{\tau'} - a_{\tau}| < |a_{\tau'} - a_{\eta}| < k'$ und somit $|a_{\tau'} - a_{\tau}| + B \leq |a_{\tau} - a_{\eta}| + B \leq k' + B < k + B$.

Ist $(a_{\xi})_{\xi < \xi}$ eine pseudokonvergente Folge in K mit Breite B , so nennen wir im folgenden $(a_{\xi} + B)_{\xi < \xi}$ die "zu $(a_{\xi})_{\xi < \xi}$ gehörige" Cauchyfolge in K/B . Des weiteren soll sich, wenn nicht anders verlangt, "Cauchyfolge" im Zusammenhang mit angeordneten Gruppen stets auf deren Ordnungstopologie beziehen. Wir können nun definieren:

(1.14) Definition:

Zwei pseudokonvergente Folgen des mit φ bewerteten Körpers K heißen "äquivalent" : $\Leftrightarrow$

- (1) Beide haben dieselbe Breite B ;
- (2) die Differenzfolge ihrer zugehörigen Cauchyfolgen in K/B ist eine Nullfolge.

Analog sollen zwei Cauchyfolgen einer angeordneten abelschen Gruppe "äquivalent" heißen, falls ihre Differenzfolge eine Nullfolge ist.

Offensichtlich sind dann zwei pseudokonvergente Folgen eines ϕ -bewerteten, angeordneten Körpers K dann und nur dann äquivalent, wenn sie dieselbe Breite B haben, und ihre zugehörigen Cauchyfolgen in K/B äquivalent sind. Wie schon bemerkt, sollen Cauchyfolgen stets reguläre Längen haben, womit alle echten Cauchyfolgen einer angeordneten abelschen Gruppe G gleiche Länge ξ (ξ ist hierbei der Koinitialitätstyp von G^+) haben. Zudem verlangen wir, daß konstant werdende Cauchyfolgen ebenfalls Länge ξ annehmen sollen. Damit kann man zu zwei Cauchyfolgen aus G stets ihre Differenzfolge bilden, d.h., Bedingung (2) aus Definition (1.14) ist sinnvoll.

Durch diese Definition erhält man eine Einteilung der Menge der pseudokonvergenten Folgen aus K in Klassen äquivalenter pseudokonvergenter Folgen. An dieser Stelle wollen wir noch

eine Bemerkung über die Existenz streng monoton fallender bzw. steigender Teilfolgen einer Cauchyfolge einfügen.

(1.15) Bemerkung:

G sei eine angeordnete abelsche Gruppe ohne kleinstes positives Element. Dann wird eine Cauchyfolge konstant oder es existieren streng monoton steigende oder fallende Teilfolgen.

Beweis:

Sei $(p_\xi)_{\xi < \zeta}$ (ζ reguläre Ordinalzahl) eine streng monoton gegen 0 fallende, d.h. mit G^+ koinitiale Folge. Dann ist ζ der Koinitialitätstyp von G^+ und jede Cauchyfolge aus G hat die Länge ζ . Weiter sei nun $(g_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine echte Cauchyfolge aus G , und wir nehmen an, sie besitze keine streng monoton fallende Teilfolge. Wir wollen zeigen, daß dann eine streng monoton steigende Teilfolge von $(g_\xi)_{\xi < \zeta}$ existiert. Dazu definieren wir für $\lambda < \zeta$:

$$T_\lambda := \{g_\xi : \xi < \zeta \wedge \exists \delta : \xi < \delta < \zeta \text{ gilt: } |g_\xi - g_\delta| < p_\lambda\}.$$

Sicher ist für $\lambda < \gamma < \zeta$ $T_\lambda \supseteq T_\gamma$. Da $(g_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine echte Cauchyfolge ist, muß eine Teilfolge $(T'_\xi)_{\xi < \zeta}$ von $(T_\xi)_{\xi < \zeta}$ existieren, so daß gilt: Für $\lambda < \gamma < \zeta$ ist $T'_\lambda \supsetneq T'_\gamma$. Damit muß für $\lambda < \gamma < \zeta$ stets ein $t \in T'_\lambda$ mit $t < T'_\gamma \vee t > T'_\gamma$ existieren. Da weiter nach Voraussetzung keine streng monoton fallende Teilfolge von $(g_\xi)_{\xi < \zeta}$ existiert, muß es ein $\eta, \eta < \zeta$, geben, so daß für alle λ, γ mit $\eta < \lambda < \gamma < \zeta$ gilt: Es gibt kein $t \in T'_\lambda$ mit $t > T'_\gamma$. Dies besagt aber, daß für alle λ, γ mit $\eta < \lambda < \gamma < \zeta$ und für alle $t \in T'_\lambda \setminus T'_\gamma$ $t < T'_\gamma$ ist. Wählt man daher für alle ξ mit $\eta < \xi < \zeta$ ein $g'_\xi \in T'_\xi \setminus T'_{\xi+1}$, so erhält man mit $(g'_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine streng monoton steigende Teilfolge von $(g_\xi)_{\xi < \zeta}$.

Mit Bemerkung (1.15) können wir jetzt jeder Klasse äquivalenter Cauchyfolgen einer angeordneten abelschen Gruppe G auf eineindeutige Weise einen eigentlichen dedekindschen Schnitt zuordnen, so daß ein $g \in G$ dann und nur dann Limes einer Cauchyfolge ist, wenn g deren zugeordneten eigentlichen dedekind=

schen Schnitt bestimmt. $(g_\xi)_{\xi < \zeta}$ sei eine echte Cauchyfolge aus einer angeordneten abelschen Gruppe G ohne kleinstes positives Element. Nach Bemerkung (1.15) existiert dann eine streng monoton steigende oder fallende Teilfolge. $(g'_\xi)_{\xi < \zeta}$ sei folglich eine streng monoton steigende Teilfolge, und S sei die durch sie bestimmte untere Klasse in G , d.h. es sei $S := \{g \in G : \forall \xi < \zeta : g < g'_\xi\}$. Die zugehörige obere Klasse D definieren wir dann als $D := C_G(S)$. Im Fall "streng monoton fallend" sei $D^* := \{g \in G : \forall \xi < \zeta : g > g'_\xi\}$. D definieren wir dann als $D := D^* \cup \inf(D^*)$, falls $\inf(D^*)$ existiert, bzw. $D := D^*$, falls $\inf(D^*)$ nicht existiert; analog zum ersten Fall sei $S := C_G(D)$. (S, D) ist in beiden Fällen offensichtlich ein dedekindscher Schnitt in G , wir nennen ihn von $(g_\xi)_{\xi < \zeta}$ bestimmt.

Hat man zwei verschiedene streng monoton fallende bzw. steigende Teilfolgen derselben Cauchyfolge, so bestimmen beide dieselbe obere bzw. untere Klasse in G . Seien nämlich $(g'_\xi)_{\xi < \zeta}$ und $(g''_\xi)_{\xi < \zeta}$ zwei verschiedene, o.B.d.A. streng monoton steigende Teilfolgen von $(g_\xi)_{\xi < \zeta}$, so muß für diese gelten:

- (a) $\bigwedge g'_\xi \quad \forall \eta < \zeta : \bigwedge \delta \text{ mit } \eta < \delta < \zeta \text{ gilt: } g'_\eta > g'_\delta$
 $\bigwedge g''_\xi \quad \forall \bar{\eta} < \zeta : \bigwedge \bar{\delta} \text{ mit } \bar{\eta} < \bar{\delta} < \zeta \text{ gilt: } g''_{\bar{\eta}} > g''_{\bar{\delta}}.$

Folglich bestimmen $(g'_\xi)_{\xi < \zeta}$ und $(g''_\xi)_{\xi < \zeta}$ dieselbe untere Klasse S in G und damit auch denselben dedekindschen Schnitt (S, D) . Analog zeigt man, daß verschiedene streng monoton fallende Teilfolgen dieselbe obere Klasse D^* und somit, nach obiger Definition, denselben dedekindschen Schnitt (S, D) bestimmen.

Ist $(g'_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine streng monoton fallende und $(g''_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine streng monoton steigende Teilfolge von $(g_\xi)_{\xi < \zeta}$, so muß gelten:

- (b) $\bigwedge p \in G, p > 0 \quad \forall \eta < \zeta : \bigwedge \xi \text{ mit } \eta < \xi < \zeta \text{ gilt: } (g'_\xi - g''_\xi) < p.$

Definiert man wie oben $S := \{g \in G : \forall \xi < \zeta \text{ mit } g < g'_\xi\}$ sowie $D^* := \{g \in G : \forall \xi < \zeta \text{ mit } g > g''_\xi\}$, so kann offensichtlich wegen (b) höchstens ein $g \in G$ mit $S < g < D^*$ existieren. Existiert ein solches Element g , so ist $g = \inf(D^*)$, d.h. $D = D^* \cup \{g\}$ und somit $D = C_G(S)$. Existiert kein solches Element, so ist $D = D^*$,

d.h. $D = C_G(S)$. Folglich bestimmen in beiden Fällen $(g'_\xi)_{\xi < \zeta}$ und $(g''_\xi)_{\xi < \zeta}$ denselben dedekindschen Schnitt (S, D) ; die oben beschriebene Zuordnung zwischen echten Cauchyfolgen und dedekindschen Schnitten aus G ist also wohldefiniert.

Da die Aussagen (a) und (b) offensichtlich auch für den Fall gelten, daß $(g'_\xi)_{\xi < \zeta}$ und $(g''_\xi)_{\xi < \zeta}$ streng monotone Teilfolgen zweier verschiedener, aber äquivalenter Cauchyfolgen aus G sind, erhält man mit analoger Argumentation: Äquivalente, echte Cauchyfolgen bestimmen denselben dedekindschen Schnitt in G . Eine Cauchyfolge, die konstant wird und etwa den Wert $a \in G$ annimmt, soll den dedekindschen Schnitt (S, D) mit $D := \{g \in G : g \geq a\}$ sowie $S := C_G(D)$ "bestimmen". Alle zu dieser Cauchyfolge äquivalenten Cauchyfolgen, auch die echten, müssen nach Definition (1.14) ebenfalls den Limes a besitzen. Folglich bestimmen alle denselben, oben definierten dedekindschen Schnitt (S, D) . Damit kann man allgemein sagen: Äquivalente Cauchyfolgen aus G bestimmen denselben dedekindschen Schnitt in G .

Hat man zwei nichtäquivalente Cauchyfolgen, so ist ihre Differenzfolge keine Nullfolge, d.h.; ihre streng monotonen Teilfolgen bzw. ihre Limites definieren verschiedene obere bzw. untere Klassen in G und somit bestimmen sie verschiedene dedekindsche Schnitte in G . Folglich haben wir eine eindeutige Zuordnung der Klassen äquivalenter Cauchyfolgen aus G zu den dedekindschen Schnitten in G .

Wir wollen noch zeigen, daß diese zugeordneten dedekindschen Schnitte alle eigentlich sind, d.h., daß äquivalente Cauchyfolgen denselben eigentlichen dedekindschen Schnitt bestimmen. Dazu sei $(g_\xi)_{\xi < \zeta}$ wiederum eine echte Cauchyfolge und $(g'_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine o.B.d.A. streng monoton steigende Teilfolge. Damit bestimmt $(g_\xi)_{\xi < \zeta}$ den dedekindschen Schnitt (S, D) mit $S = \{g \in G : \forall \xi < \zeta \text{ mit } g < g'_\xi\}$. Ist $p \in G$, $p > 0$, so muß, da $(g'_\xi)_{\xi < \zeta}$ insbesondere eine mit S konfinale Cauchyfolge ist, ein $s \in S$ mit $(s+p) > S$, d.h. $(s+p) \in D$ existieren; also ist (S, D) ein eigentlicher dedekindscher Schnitt. Im Fall kon-

stant werdender Cauchyfolgen bestimmen diese einen dedekindschen Schnitt (S, D) , wobei D ein kleinstes Element besitzt. Damit ist aber klar, daß auch in diesem Fall (S, D) ein eigentlicher dedekindscher Schnitt ist.

Ist umgekehrt (S, D) ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in G , so wird die Folge $(f_{\xi})_{\xi < \xi}$ wie folgt definiert: Sei $(p_{\xi})_{\xi < \xi}$ (ξ Koinitialitätstyp von G^+) eine streng monoton fallende, mit G^+ koinitiale Folge, dann sei $(f_{\xi})_{\xi < \xi}$ eine streng monoton steigende Folge aus S mit der Eigenschaft: $(f_{\xi} + p_{\xi}) \in D$ für alle $\xi < \xi$. Sicher ist $(f_{\xi})_{\xi < \xi}$ insbesondere eine Cauchyfolge, die offensichtlich den eigentlichen dedekindschen Schnitt (S, D) bestimmt.

Damit haben wir gezeigt: Unsere auf Seite 16 angegebene Zuordnung zwischen den Klassen äquivalenter Cauchyfolgen und den dedekindschen Schnitten in G ist insbesondere eine bijektive Abbildung der Menge der Klassen äquivalenter Cauchyfolgen aus G auf die Menge der eigentlichen dedekindschen Schnitte in G !

Wir können nun das folgende, für unseren Charakterisierungssatz wichtige, Lemma formulieren.

(1.16) Lemma:

Sei K ein ordnungsverträglich bewerteter, angeordneter Körper.

Dann läßt sich die Menge der Klassen äquivalenter pseudokonvergenter Folgen aus K bijektiv auf die Menge der B -eigentlichen B -Schnitte in K (B sei beliebig wählbare $\mathbb{T}_f$ -Untergruppe von $(K, +)$) abbilden. Hierbei wird der pseudokonvergente Folge $(a_{\xi})_{\xi < \xi}$ mit Breite B der B^* -eigentliche B^* -Schnitt (S, D) zugeordnet, falls gilt:

(1) Es ist $B = B^*$;

(2) das Bild (S', D') von (S, D) unter dem kanonischen Homomorphismus von K nach K/B ist der eigentliche dedekindsche Schnitt in K/B , der von der Cauchyfolge $(a_{\xi} + B)_{\xi < \xi}$ eindeutig bestimmt wird.

Um unser Lemma beweisen zu können, brauchen wir noch die folgende Aussage.

(1.17) Bemerkung:

Sei B eine $\mathbb{T}_\varphi$ -Untergruppe von $(K, +)$.

Dann ist der Koinitialitätstyp der angeordneten Gruppe K/B gleich dem Konfinalitätstyp von $\mathbb{T}_\varphi \setminus \mathbb{I}(B)$.

Beweis:

Sei λ_1 der Koinitialitätstyp von $(K/B)^+$ und λ_2 der Konfinalitätstyp von $\mathbb{T}_\varphi \setminus \mathbb{I}(B)$. Da $\mathbb{I}$ nach Voraussetzung eine ordnungsverträgliche Bewertung ist, gilt sicher: $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Sei $k+B > 0+B$ und $\delta := \mathbb{I}(k)$, dann ist $\delta < \mathbb{I}(B)$ wegen $k > B$. B ist aber eine $\mathbb{T}_\varphi$ -Untergruppe, und es existiert daher ein δ' mit $\delta < \delta' < \mathbb{I}(B)$. Folglich gibt es zu jedem $k+B \in K/B$, $k+B > 0+B$, ein $\delta' \in \mathbb{T}_\varphi \setminus \mathbb{I}(B)$ mit $\mathbb{I}(k) < \delta'$; damit ist $\lambda_2 \geq \lambda_1$, also $\lambda_1 = \lambda_2$.

Beweis von Lemma (1.16):

Die gesuchte Abbildung bezeichnen wir mit "f" und definieren sie im folgenden als eine Komposition dreier Abbildungen f_1 , f_2 und f_3 . f_1 ist eine Abbildung von der Menge der Klassen äquivalenter pseudokonvergenter Folgen in die Menge der Klassen äquivalenter Cauchyfolgen aus K/B (B durchlaufe alle $\mathbb{T}_\varphi$ -Untergruppen von $(K, +)$); f_2 bilde letztere Menge in die Menge der eigentlichen dedekindschen Schnitte aus den gesamten Restklassengruppen K/B ab; f_3 ordne jedem eigentlichen dedekindschen Schnitt (S', D') aus einer der Restklassengruppen K/B einen B -eigentlichen B -Schnitt in K zu.

Wir kennzeichnen im folgenden Äquivalenzklassen von pseudokonvergenten Folgen bzw. von Cauchyfolgen durch Querstriche über den Repräsentanten. Es sei nun im einzelnen für eine pseudokonvergente Folge $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ mit Breite B $f_1((a_\xi)_{\xi < \zeta}) := \overline{(a_\xi + B)_{\xi < \zeta}}$. Da, wie schon bemerkt, zwei pseudokonvergente Folgen genau dann äquivalent sind, wenn sie

gleiche Breite B haben und ihre zugehörigen Cauchyfolgen äquivalent sind, ist f_1 eine wohldefinierte, injektive Abbildung. f_2 sei die auf Seite 16 definierte Abbildung, die, wie in den Vorbemerkungen zu Lemma (1.16) bereits gezeigt wurde, bijektiv ist. f_3 ordne schließlich jedem eigentlichen dedekindschen Schnitt (S', D') in K/B (B sei eine T_p -Untergruppe) den B -Schnitt (S, D) mit $S := \{a \in K : a+B \in S'\}$ und $D := \{a \in K : a+B \in D'\}$ zu. Nach Lemma (1.7) ist dieser B -Schnitt B -eigentlich und insbesondere f_3 eine bijektive Abbildung.

Wir definieren nun $f := f_3 \circ f_2 \circ f_1$ und erhalten das folgende Diagramm: $((a_g)_{g \leq s})$ habe die Breite B !

$$\begin{array}{ccccc} \overline{(a_g)_{g \leq s}} & \xrightarrow{f_1} & \overline{(a_g+B)_{g \leq s}} & \xrightarrow{f_2} & (S', D') \xrightarrow{f_3} (S, D) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & f & & & \end{array}$$

Um die Bijektivität von f zu beweisen, müssen wir nur noch zeigen, daß f_1 auch surjektiv ist. Hierzu zeigen wir: Zu einer Äquivalenzklasse $\overline{(b_g+B)_{g \leq s}}$ von Cauchyfolgen aus der angeordneten abelschen Gruppe K/B (B sei eine T_p -Untergruppe) existiert eine pseudokonvergente Folge aus K mit der Breite B , deren zugehörige Cauchyfolge in K/B dieser Äquivalenzklasse angehört.

Die Äquivalenzklasse $\overline{(b_g+B)_{g \leq s}}$ bestimme den eigentlichen dedekindschen Schnitt (S', D') in K/B (d.h. es sei $(S', D') = f_2(\overline{(b_g+B)_{g \leq s}})$). Dann sei $(g'_g)_{g \leq s}$ eine streng monoton fallende Folge aus K/B , die mit D' , bzw. $D' \setminus \min(D')$, falls $\min(D')$ existiert, koinitial ist. Da (S', D') eigentlich ist, muß $(g'_g+B)_{g \leq s}$ eine Cauchyfolge sein; als solche bestimmt sie aber den eigentlichen dedekindschen Schnitt (S', D') (d.h. es ist auch $f_2(\overline{(g'_g+B)_{g \leq s}}) = (S', D')$) und ist somit, wie alle ihre Teilfolgen, ein Element der Äquivalenzklasse $\overline{(b_g+B)_{g \leq s}}$. Wir müssen daher nur noch zeigen, daß eine Teilfolge $(g'_g+B)_{g \leq s}$ von $(g_g+B)_{g \leq s}$ existiert, so daß $(g'_g)_{g \leq s}$ in K eine pseudokon-

vergente Folge ist.

Hierzu sei $(q_\xi)_{\xi < \varsigma}$ eine streng monoton steigende Folge in T_γ , die mit $T_\gamma \setminus \gamma(B)$ konfinal ist. ς soll hierbei eine reguläre Ordinalzahl sein und entspricht damit nach Bemerkung (1.17) der Länge der Cauchyfolgen aus K/B. Da $(g_\xi + B)_{\xi < \varsigma}$ eine Cauchyfolge in K/B ist, gilt, wiederum wegen Bemerkung (1.17):

$$\bigwedge q_\xi \ (\xi < \varsigma) \ \forall \eta = \eta(q_\xi) : \bigwedge \delta, \gamma \text{ mit } \eta < \delta < \gamma < \varsigma \\ \text{gilt: } \gamma(g_\gamma - g_\delta) > q_\xi.$$

Wir können also eine Folge $(T_\xi)_{\xi < \varsigma}$ von Endstücken der Folge $(g_\xi)_{\xi < \varsigma}$ aus K folgendermaßen definieren: Es sei für $\lambda < \varsigma$:

$$T_\lambda := \{g_\delta : \delta < \varsigma \wedge \gamma(g_\gamma - g_\delta) > q_\lambda \ \bigwedge \gamma \text{ mit } \delta < \gamma < \varsigma\}.$$

Sicher ist für $\xi < \delta < \varsigma$ wieder $T_\xi \supseteq T_\delta$. Wir wollen nun zeigen, daß eine Teilfolge $(T'_\xi)_{\xi < \varsigma}$ von $(T_\xi)_{\xi < \varsigma}$ und eine Teilfolge $(g'_\xi)_{\xi < \varsigma}$ von $(g_\xi)_{\xi < \varsigma}$ mit den folgenden Eigenschaften existieren:

- (1) Für $\xi < \delta < \varsigma$ ist $T'_\xi \supsetneq T'_\delta$;
- (2) $g'_\xi \in T'_\xi \ \bigwedge \xi : \xi < \varsigma$ (d.h.: $\gamma(g'_\gamma - g'_\xi) > q'_\xi \ \bigwedge \xi, \delta : \xi < \delta < \varsigma$);
- (3) $\gamma(g'_\delta - g'_\xi) \leq q'_{\xi+1} \ \bigwedge \xi, \delta : \xi < \delta < \varsigma$;

hierbei sei q'_ξ der nach der Definition von T_λ zu T'_ξ gehörige Wert in $T_\gamma \setminus \gamma(B)$.

Wir definieren $(g'_\xi)_{\xi < \varsigma}$ und $(T'_\xi)_{\xi < \varsigma}$ durch transfinite Induktion: Sei $\lambda < \varsigma$ und für alle $\xi < \lambda$ ein g'_ξ sowie ein T'_ξ definiert, so daß gilt: Die Bedingungen (1) bis (3) sind für alle ξ mit $\xi < \lambda$ bzw. für alle ξ, δ mit $\xi < \delta < \lambda$ erfüllt. Es müssen nun g'_λ und T'_λ so gewählt werden, daß diese Bedingungen auch für alle ξ mit $\xi < \lambda+1$ bzw. für alle ξ, δ mit $\xi < \delta < \lambda+1$ gelten. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: λ hat einen direkten Vorgänger $(\lambda-1)$.

Da $g'_{\lambda-1} + B$ als Folgenglied von $(g_\xi + B)_{\xi < \varsigma}$ nicht der Limes von $(g_\xi + B)_{\xi < \varsigma}$ sein kann ($(g_\xi + B)_{\xi < \varsigma}$ ist streng monoton fallend!), gibt es in diesem Fall ein $\delta < \varsigma$, so daß gilt: $g'_{\lambda-1} \notin T_\delta$. Mit anderen Worten, es gibt ein Folgenglied g_μ mit $g_\mu < g'_{\lambda-1}$ und $\gamma(g_\mu - g'_{\lambda-1}) \leq q_\delta$. Da $(g_\xi + B)_{\xi < \varsigma}$ und somit insbesondere $(g_\xi)_{\xi < \varsigma}$ streng monoton fallend sowie γ eine ordnungsver-

trägliche Bewertung ist, besitzt auch jedes g_μ nachfolgende Folgenglied von $(g_\xi)_{\xi < \lambda}$ diese Eigenschaft. Daher können wir o.B.d.A. annehmen: $g_\mu \in T_\delta$. Definieren wir nun " $g'_\lambda := g_\mu$ " und " $T'_\lambda := T_\delta$ ", so gilt folglich:

- 1.) $T'_\lambda \subsetneq T'_{\lambda-1}$ wegen $g'_{\lambda-1} \in T'_{\lambda-1}$ und $g'_{\lambda-1} \notin T'_\lambda$. Damit ist auch $T'_\lambda \subsetneq T'_\xi$ für alle $\xi < \lambda$.
- 2.) $g'_\lambda \in T'_\lambda$.
- 3.) $\varphi(g'_\lambda - g'_\xi) \leq q'_{\xi+1}$ für alle $\xi < \lambda$, denn es gilt:
 - a) $\varphi(g'_\lambda - g'_{\lambda-1}) \leq q'_\lambda = q'_\delta$;
 - b) für alle $\xi < (\lambda-1)$ ist wegen $\varphi(g'_\lambda - g'_{\lambda-1}) > q'_{\lambda-1}$ und $q'_{\lambda-1} \geq q'_{\xi+1} \geq \varphi(g'_{\lambda-1} - g'_\xi)$:
 $\varphi(g'_\lambda - g'_\xi) = \varphi(g'_\lambda - g'_{\lambda-1} + g'_{\lambda-1} - g'_\xi) = \varphi(g'_{\lambda-1} - g'_\xi) \leq q'_{\xi+1}$.

2. Fall: λ ist eine Limeszahl.

Da $\mathcal{S}$ eine reguläre Ordinalzahl ist, existiert ein $\eta < \mathcal{S}$, so daß für alle $\xi < \lambda$ gilt: $T_\eta \subsetneq T'_\xi$. In diesem Fall sei " $T'_\lambda := T_\eta$ " und g'_λ ein beliebiges Element aus T'_λ . Dann gilt:

- 1.) $T'_\lambda \subsetneq T'_\xi$ für alle $\xi < \lambda$.
- 2.) $g'_\lambda \in T'_\lambda$.
- 3.) $\varphi(g'_\lambda - g'_\xi) \leq q'_{\xi+1}$ für alle $\xi < \lambda$, denn wegen $\varphi(g'_\lambda - g'_{\xi+1}) > q'_{\xi+1}$ und $\varphi(g'_{\xi+1} - g'_\xi) \leq q'_{\xi+1}$ ist:
 $\varphi(g'_\lambda - g'_\xi) = \varphi(g'_\lambda - g'_{\xi+1} + g'_{\xi+1} - g'_\xi) = \varphi(g'_{\xi+1} - g'_\xi) \leq q'_{\xi+1}$.

Damit haben unsere so definierten Folgen $(g'_\xi)_{\xi < \mathcal{S}}$ und $(T'_\xi)_{\xi < \mathcal{S}}$ die Eigenschaften (1) - (3), und wir wollen nur noch zeigen, daß diese Folge $(g'_\xi)_{\xi < \mathcal{S}}$ pseudokonvergent in K ist. Hierzu seien δ, δ', μ Ordinalzahlen mit $\xi < \delta' < \mu < \mathcal{S}$. Dann ist wegen Bedingung (3) $\varphi(g'_\delta - g'_\xi) \leq q'_{\xi+1}$ und wegen Bedingung (2) $\varphi(g'_\mu - g'_\delta) > q'_\delta$. Damit erhält man:

$$\varphi(g'_\delta - g'_\xi) \leq q'_{\xi+1} \leq q'_\delta < \varphi(g'_\mu - g'_\delta).$$

Folglich ist $(g'_\xi)_{\xi < \mathcal{S}}$ eine pseudokonvergente Folge in K mit der Breite B , deren zugehörige Cauchyfolge $(g'_\xi + B)_{\xi < \mathcal{S}}$ als Teilfolge von $(g_\xi + B)_{\xi < \mathcal{S}}$ ein Element der Äquivalenzklasse $(b_{\mathcal{S}} + B)_{\xi < \mathcal{S}}$ ist. Damit ist Lemma (1.16) bewiesen.

Wir wollen jetzt noch einen Zusammenhang zwischen den Pseudolimites einer pseudokonvergenten Folge $(a_\xi)_{\xi < \mathcal{S}}$ aus K mit der

Breite B und den definierenden Elementen des nach Lemma (1.16) der pseudokonvergenten Folge $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ zugeordneten B -eigentlichen B -Schnittes (S, D) in K aufzeigen.

(1.18) Bemerkung:

Sei K ein mit γ ordnungsverträglich bewerteter, angeordneter Körper und $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine pseudokonvergente Folge aus K mit der Breite B .

Dann ist $g \in K$ genau dann ein Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$, wenn $g+B$ Limes der zugehörigen Cauchyfolge $(a_\xi+B)_{\xi < \zeta}$ in K/B ist.

Beweis:

Ist g ein Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$, so ist $g+B$ offensichtlich Limes von $(a_\xi+B)_{\xi < \zeta}$. Sei nun umgekehrt $g'+B$ Limes von $(a_\xi+B)_{\xi < \zeta}$; wir wollen zeigen, daß dann g' ein Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ ist. Da $(a_\xi+B)_{\xi < \zeta}$ eine Cauchyfolge in K/B ist, gilt:

$$\bigwedge k+B \in K/B, k+B > 0+B \quad \forall \eta < \zeta : \bigwedge \delta : \eta < \delta < \zeta \text{ gilt:} \\ |g' - a_\delta| + B < k+B.$$

B ist aber eine $\mathbb{T}_\gamma$ -Untergruppe von $(K, +)$, und folglich ist dies gleichbedeutend mit:

$$\bigwedge \gamma \in \mathbb{T}_\gamma \text{ mit } \gamma < \gamma(B) \quad \forall \eta < \zeta : \bigwedge \delta : \eta < \delta < \zeta \text{ gilt:} \\ \gamma(g' - a_\delta) > \gamma.$$

Wir wählen nun zu einem gegebenen $\xi < \zeta$ ein $\gamma \in \mathbb{T}_\gamma$ mit $\gamma(a_{\xi+1} - a_\xi) = p_\xi < \gamma < \gamma(B)$ sowie ein δ mit $\xi < \delta < \zeta$, so daß für alle μ mit $\delta < \mu < \zeta$ gilt: $\gamma(g' - a_\mu) > \gamma$. Damit ist $\gamma(g' - a_\delta) > \gamma \geq p_\xi = \gamma(a_{\xi+1} - a_\xi) = \gamma(a_\delta - a_\xi)$, und wir können folgern:

$$\gamma(g' - a_\xi) = \gamma(g' - a_\delta + a_\delta - a_\xi) = \min\{\gamma(g' - a_\delta), \gamma(a_\delta - a_\xi)\} \\ = \gamma(a_\delta - a_\xi) = p_\xi.$$

Da dies für alle $\xi < \zeta$ gilt, ist g' ein Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$.

(1.19) Folgerung:

Sei zudem (S, D) der nach Lemma (1.16) der pseudokonvergenten Folge $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ zugeordnete B -eigentliche B -Schnitt, so ist g dann und nur dann ein Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$, wenn g definierendes Element von (S, D) ist.

Wie Kaplansky gezeigt hat¹⁾, ist ein bewerteter Körper K dann und nur dann maximal bewertet, wenn jede pseudokonvergente Folge aus K einen Pseudolimes in K besitzt. Mit Lemma (1.16) und Folgerung (1.19) erhalten wir damit unseren Charakterisierungssatz:

(1.20) Satz:

Ein angeordneter Körper K mit einer ordnungsverträglichen Bewertung f ist dann und nur dann maximal bewertet, wenn für jede beliebige $\mathbb{N}$ -Untergruppe B jeder B -eigentliche B -Schnitt ein definierendes Element besitzt (d.h., wenn keine freien B -eigentlichen B -Schnitte in K existieren).

Maximal o -bewertete, angeordnete Körper besitzen noch eine weitere Eigenschaft hinsichtlich ihrer dedekindschen Schnitte. Nach R. Baer²⁾ heißt ein angeordneter Körper "stetig abgeschlossen", falls jeder seiner eigentlichen dedekindschen Schnitte von einem Element des Körpers bestimmt wird. Nach Satz (1.20) besitzt in einem maximal o -bewerteten, angeordneten Körper jeder B -eigentliche B -Schnitt ein definierendes Element. Für den Spezialfall $B = (0)$ besagt dies aber, daß jeder eigentliche dedekindsche Schnitt von einem Element des Körpers bestimmt wird; folglich ist ein maximal o -bewerteter, angeordneter Körper auch stetig abgeschlossen. Ist K ein stetig abgeschlossener Körper, so kann man zeigen, daß mit jedem Unterkörper U , über dem K archimedisch ist, auch dessen stetiger Abschluß $\tilde{U}$ o -isomorph bezüglich U in K enthalten ist³⁾. Wir wollen einen Körper, der diese Eigenschaft für alle seine Unterkörper besitzt, "universell stetig abgeschlossen" nennen.

In §2 werden wir nachweisen können, daß ein bezüglich V maximal o -bewerteter, angeordneter Körper, dessen Rest=

¹⁾ siehe Lit. [6], Seite 309, Theorem 4

²⁾ siehe Lit. [3], Seite 179

³⁾ siehe Lit. [3], Seite 179, Satz 2.5. sowie Seite 182, Folgerung 2.11.

klassenkörper zu R o -isomorph ist, universell stetig abgeschlossen ist. Andererseits ist aber ein ordnungsverträglich bewerteter, angeordneter Körper, der universell stetig abgeschlossen und dessen Restklassenkörper bezüglich V zu R o -isomorph ist, nicht notwendig bezüglich V maximal bewertet. Hierzu wollen wir das folgende Beispiel anführen:

Es sei $H(R, Q)$ der Körper der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus R und der Trägergruppe $(Q, +)$; für $f \in H(R, Q)$ sei $s(f)$ der Träger von f . Wir definieren:

$$D := \{f \in H(R, Q) : |s(f) \cap U| < \infty \text{ wenn } U \text{ untere Klasse in } Q \neq U\},$$

dann ist D ein stetig abgeschlossener, echter Unterkörper von $H(R, Q)$ ¹⁾. Sicher ist $H(R, Q)$ bezüglich der natürlichen Bewertung V maximal o -bewertet und ist andererseits eine unmittelbare Erweiterung von D . Damit ist D bezüglich V offensichtlich nicht maximal bewertet. Da zudem der Restklassenkörper von D bezüglich V zu R o -isomorph ist, müssen wir nur noch zeigen, daß D universell stetig abgeschlossen ist. Hierzu sei U ein beliebiger Unterkörper von D .

Fall 1): D ist archimedisch über U . Wie bereits erwähnt, liegt dann auch der stetige Abschluß $\tilde{U}$ von U in D .

Fall 2): D ist nicht archimedisch über U . Dann kann auch $V(D) = Q$ nicht archimedisch über $V(U)$ sein. Folglich muß $V(U) = (0)$ sein, d.h., U ist Unterkörper des isomorphen Bildes von R in D . Damit liegt aber auch in diesem Fall der stetige Abschluß $\tilde{U}$ von U in D ; also ist D universell stetig abgeschlossen.

Wir wollen nun noch o -Erweiterungen ordnungsverträglich bewerteter, angeordneter Körper betrachten. Dazu beweisen wir zunächst die folgende Bemerkung:

(1.21) Bemerkung:

Es sei K ein angeordneter Körper mit der ordnungsver-

¹⁾ siehe Lit. [3], Seite 204

träglichen Bewertung φ . L sei eine o -Erweiterung von K . Dann läßt sich φ zu einer ordnungsverträglichen Bewertung auf L fortsetzen.

Weiter gilt: Ist $\overline{\varphi}$ irgendeine ordnungsverträgliche Bewertung von L , die φ fortsetzt, so ist eine bezüglich φ pseudokonvergente Folge aus K mit der Breite B auch bezüglich $\overline{\varphi}$ in L pseudokonvergent, und ihre Breite $\overline{B}$ in L läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}\overline{B} &= \{x \in L : \varphi(x) > \varphi(k) \wedge k \in K \setminus B\} \\ &= \{x \in L : \varphi(x) > \varphi(K) \setminus \varphi(B)\}.\end{aligned}$$

Beweis:

Wie wir bereits gesehen haben (siehe Seite 5), gibt es eine konvexe Untergruppe Δ_φ von $\mathcal{T} = \mathcal{T}_v = [K]$, so daß wir $\mathcal{T}_\varphi$ mit $\mathcal{T}/\Delta_\varphi$ identifizieren können. Andererseits wird ja die Bewertung φ durch die konvexe Untergruppe Δ_φ von $\mathcal{T}$ bestimmt; hierbei gilt: $\varphi(k) = v(k) + \Delta_\varphi = [k] + \Delta_\varphi$ für $k \in K$. Bezeichnet man nun die konvexe Hülle von Δ_φ in $\mathcal{T}(L) := [L]$, mit $\hat{\Delta}_\varphi$, so erhält man mit $\varphi(1) := v(1) + \hat{\Delta}_\varphi$ für $l \in L$ eine ordnungsverträgliche Bewertung auf L , die φ von K auf L fortsetzt.

Sei nun $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine pseudokonvergente Folge aus K mit der Breite B , und $\overline{\varphi}$ sei eine beliebige, ordnungsverträgliche Fortsetzung von φ auf L . Dann ist $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ offensichtlich auch bezüglich $\overline{\varphi}$ pseudokonvergent, und die zugehörige Breite ist $\overline{B} = \{x \in L : \varphi(x) > p_\delta \wedge \delta < \zeta\}$. Dabei ist für $\delta < \zeta$ $p_\delta := \overline{\varphi}(a_{\delta+1} - a_\delta) = \varphi(a_{\delta+1} - a_\delta)$, letzteres wegen $a_\xi \in K$ für alle $\xi < \zeta$. Folglich liegen die Elemente p_δ in $\mathcal{T}_\varphi$, und es gilt wegen der Konfinalität von $(p_\xi)_{\xi < \zeta}$ mit $\varphi(K) \setminus \varphi(B) : B = \{x \in L : \varphi(x) > \varphi(K) \setminus \varphi(B)\} = \{x \in L : \varphi(x) > \varphi(k) \wedge k \in K \setminus B\}$.

Damit können wir den folgenden Satz formulieren:

(1.22) Satz:

Es sei K ein angeordneter Körper mit einer ordnungsverträglichen Bewertung φ . L sei eine o -Erweiterung von K

(nicht notwendig unmittelbar !), auf die $\mathcal{I}$ ordnungs-
verträglich fortgesetzt sei, und $(a_s)_{s < s}$ eine pseudo=
konvergente Folge aus K mit der Breite B , die in K
keinen Pseudolimes hat. (S, D) sei der nach Lemma (1.16)
der Äquivalenzklasse $\overline{(a_s)_{s < s}}$ eindeutig zugeordnete
freie B -eigentliche B -Schnitt in K .
Dann gilt: $t \in L$ ist dann und nur dann ein Pseudolimes
von $(a_s)_{s < s}$, wenn in L gilt: $S < t < D$.

Bevor wir diesen Satz beweisen, soll noch ein Hilfssatz
über angeordnete abelsche Gruppen hergeleitet werden.

(1.23) Hilfssatz:

Es sei G eine angeordnete abelsche Gruppe ohne kleinstes
positives Element. S und D seien Teilmengen von G mit
 $\emptyset \neq S < D \neq \emptyset$ und der Eigenschaft: $\bigwedge g \in G: g > 0 \quad \forall s \in S,$
 $d \in D: (d-s) < g$.

Dann ist (S, D) ein eigentlicher dedekindscher Schnitt
in G , oder es existiert ein $g \in G$ mit: $S < g < D$ und
 $S \cup \{g\} \cup D = G$.

Beweis:

Angenommen, diese Aussage stimmt nicht. Dann gibt es Elemente
 $g_1, g_2 \in G$ mit: $S < g_1 < g_2 < D$. Hieraus folgt jedoch: $0 < (g_2 - g_1) <$
 $(d-s) \quad \bigwedge s \in S, d \in D$; dies steht aber im Widerspruch zur Voraus=
setzung des Hilfssatzes.

Beweis von Satz (1.22):

(S, D) sei der nach Lemma (1.16) der Äquivalenzklasse $\overline{(a_s)_{s < s}}$
zugeordnete B -eigentliche B -Schnitt in K , dieser ist, da
 $(a_s)_{s < s}$ in K keinen Pseudolimes hat, nach Folgerung (1.19)
frei; $(\tilde{S}, \tilde{D})$ sei der zugeordnete $\tilde{B}$ -eigentliche $\tilde{B}$ -Schnitt in L .
 $\tilde{B}$ ist hierbei die Breite von $(a_s)_{s < s}$ in L , und da nach Bemer=
kung (1.21) $\tilde{B}$ sich schreiben läßt als $\tilde{B} = \{x \in L: \mathcal{I}(x) >$
 $\mathcal{I}(K) \setminus \mathcal{I}(B)\}$, erhält man: $B \subseteq \tilde{B}$. Folglich gilt allgemein:

$$(a) \ a+B \subseteq a+\tilde{B} \quad \bigwedge a \in K.$$

Weiter können wir zeigen:

$$(b) \ a+B \supseteq b+B \Leftrightarrow a+\tilde{B} \supseteq b+\tilde{B} \quad \bigwedge a, b \in K.$$

Denn es gilt für alle $a, b \in K$:

$$\begin{aligned} a+B \supseteq b+B &\Leftrightarrow (a-b)+B \supseteq B \\ &\Leftrightarrow (a-b) \supseteq B \\ &\Leftrightarrow f(a-b) < f(B) \wedge (a-b) \supseteq 0 \\ &\Leftrightarrow f(a-b) < f(\tilde{B}) \wedge (a-b) \supseteq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b) \supseteq \tilde{B} \\ &\Leftrightarrow a+\tilde{B} \supseteq b+\tilde{B}. \end{aligned}$$

Aus (a) und (b) folgt zudem:

$$(c) \ a+B = b+B \Leftrightarrow a+\tilde{B} = b+\tilde{B} \quad \bigwedge a, b \in K.$$

Es sei nun $t \in L$ ein Pseudolimes von $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ in L . Wir wollen zeigen, daß dann gilt: $S < t < D$!

$(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ ist eine pseudokonvergente Folge in L mit der Breite $\tilde{B}$, $(a_{\xi}+\tilde{B})_{\xi < \zeta}$ ist dann ihre zugehörige Cauchyfolge in $L/\tilde{B}$.

Diese kann nach der Definition der Pseudokonvergenz aber nicht konstant werden und hat somit nach Bemerkung (1.15) eine

streng monoton steigende oder fallende Teilfolge; $(b_{\xi}+\tilde{B})_{\xi < \zeta}$

sei o.B.d.A. eine streng monoton fallende Teilfolge von $(a_{\xi}+\tilde{B})_{\xi < \zeta}$.

Wegen (b) ist dann $(b_{\xi}+B)_{\xi < \zeta}$ ebenfalls eine streng monoton

fallende Teilfolge von $(a_{\xi}+B)_{\xi < \zeta}$, der zu $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ gehörigen

Cauchyfolge in K/B . Nach den Zuordnungsvorschriften für (S, D) ¹⁾

gilt damit:

$$S = \{x \in K : x+B < b_{\xi}+B \quad \bigwedge \xi < \zeta\}$$

$$D = \{y \in K : \forall \xi < \zeta : y+B > b_{\xi}+B\}.$$

Wegen (b) gilt sogar:

$$S = \{x \in K : x+\tilde{B} < b_{\xi}+\tilde{B} \quad \bigwedge \xi < \zeta\}$$

$$D = \{y \in K : \forall \xi < \zeta : y+\tilde{B} > b_{\xi}+\tilde{B}\}.$$

Da $t+\tilde{B}$ nach Bemerkung (1.18) Limes von $(a_{\xi}+\tilde{B})_{\xi < \zeta}$ in $L/\tilde{B}$ ist, muß $t+\tilde{B}$ insbesondere Limes von $(b_{\xi}+\tilde{B})_{\xi < \zeta}$ sein. Damit ist $t+\tilde{B}$ das größte Element in $L/\tilde{B}$ mit der Eigenschaft: $t+\tilde{B} < b_{\xi}+\tilde{B}$ für

¹⁾ siehe S.16 ff.

alle $\xi < \zeta$; also können wir, da für jedes Element $x \in K$ nach Voraussetzung $x + \tilde{B}$ kein Limes von $(a_\xi + \tilde{B})_{\xi < \zeta}$ und somit auch keiner von $(b_\xi + \tilde{B})_{\xi < \zeta}$ ist, S und D folgendermaßen schreiben:

$$(d) \quad S = \{x \in K : x + \tilde{B} < t + \tilde{B}\} \\ D = \{y \in K : y + \tilde{B} > t + \tilde{B}\}.$$

Damit gilt in L offensichtlich: $S < t < D$.

Nun sei t ein beliebiges Element aus L mit $S < t < D$. Wir wollen zeigen, daß dann t ein Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ ist.

Dazu definieren wir:

$$S_L := \{x \in L : \forall s \in S: x \leq s\} \\ D_L := \{y \in L : \forall d \in D: y \geq d\}.$$

Wegen $\emptyset \neq S < D \neq \emptyset$ ist offensichtlich auch:

$$(e) \quad \emptyset \neq S_L < D_L \neq \emptyset.$$

Weiter wollen wir zeigen, daß gilt:

$$(f) \quad S_L + \tilde{B} = S_L \quad \text{und} \quad D_L + \tilde{B} = D_L;$$

hierzu genügt es zu zeigen, daß $S_L + \tilde{B} \subseteq S_L$ sowie $D_L + \tilde{B} \subseteq D_L$ gilt. Hierzu sei $b \in \tilde{B}$ und $x \in S_L$ beliebig gewählt. Nach der Definition von S_L gibt es ein Element $s \in S$ mit $x \leq s$. Nun ist (S, D) ein B-Schnitt in K und hat als solcher die Eigenschaft: $\bigwedge s \in S \quad \forall k \in K, k > B : (s+k) \in S$. Ein solches Element $k \in K$ sei in unserem Fall gewählt. Für k gilt nach Bemerkung (1.21) in L sogar: $k > \tilde{B}$; folglich ist $b < k$, und wegen $x \leq s$ erhält man damit: $(x+b) < (s+k)$. Da $(s+k)$ ein Element von S ist, muß $(x+b)$ in S_L liegen, d.h. es gilt: $S_L + \tilde{B} \subseteq S_L$. Analog zeigt man: $D_L + \tilde{B} \subseteq D_L$; man ersetzt die oben angeführte Eigenschaft der unteren Klasse S durch die Eigenschaft: $\bigwedge d \in D \quad \forall k \in K, k > B : (d-k) \in D$; dies gilt, da $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ keinen Pseudolimes in K hat, und daher (S, D) ein "freier" B-eigentlicher B-Schnitt ist. Wir wollen jetzt noch zeigen, daß zu jedem Element $l \in L$ mit $l > \tilde{B}$ ein $y \in S_L$ mit $(y+l) \in D_L$ existiert. Sei also $l \in L$ und $l > \tilde{B}$, dann gibt es ein Element $k \in K$ mit $k > B$, welches man nach Be-

merkung (1.21) so wählen kann, daß gilt: $k \leq 1$; damit ist insbesondere $\tilde{B} < k \leq 1$. Da (S, D) B -eigentlich ist, gibt es ein Element $s \in S$ mit $(s+k) \in D$; wegen $k \leq 1$ ist $(s+k) \leq (s+1)$ und folglich liegt $(s+1)$ in D_L . Damit gilt:

$$(g) \quad \bigwedge_{l \in L: 1 > \tilde{B}} \quad \forall x \in S_L : (x+1) \in D_L.$$

Bezeichnen wir den kanonischen α -Homomorphismus von L in $L/\tilde{B}$ mit π , so sei $S_L' := \pi(S_L)$ sowie $D_L' := \pi(D_L)$. Aus den Aussagen (e), (f) und (g) folgt, daß dann diese Teilmengen S_L' und D_L' von $L/\tilde{B}$ die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes (1.23) erfüllen. Da es außerdem nach Voraussetzung ein Element $t \in L$ mit $S < t < D$ gibt, und damit wegen (f) bzw. der Definition von S_L und D_L die Ungleichung $S_L' < t + \tilde{B} < D_L'$ gilt, folgt somit:

$$(h) \quad S_L' \cup \{t+B\} \cup D_L' = L/\tilde{B}.$$

Wegen (b) und (c) ist aber offensichtlich D Teilmenge von $\tilde{D}$ und S Teilmenge von $\tilde{S}$; also gilt insbesondere: $D_L \subseteq \tilde{D}$ und $S_L \subseteq \tilde{S}$. Ist nun $\tilde{S}' := \pi(\tilde{S})$ sowie $\tilde{D}' := \pi(\tilde{D})$, so ist $(\tilde{S}', \tilde{D}')$ ein eigentlicher dedekindscher Schnitt mit $\tilde{S}' \supseteq S_L'$ und $\tilde{D}' \supseteq D_L'$. Da $\tilde{S}'$ kein größtes Element hat, muß gelten: $\tilde{S}' = S_L'$ und $\tilde{D}' = D_L' \cup \{t+B\}$. Also ist $(t+\tilde{B})$ das kleinste Element von $\tilde{D}'$ und somit t definierendes Element des $\tilde{B}$ -eigentlichen $\tilde{B}$ -Schnittes $(\tilde{S}, \tilde{D})$ in L . Nach Folgerung (1.19) ist t ein Pseudolimes von $(a_s)_{s \in S}$.

§2 MAXIMAL O-BEWERTETE ERWEITERUNGSKÖRPER ANGEORDNETER KÖRPER.

In diesem Paragraphen sollen vor allem die beiden folgenden Fragen behandelt werden:

1.) Sei K ein angeordneter Körper, und γ_1, γ_2 seien zwei ordnungsverträgliche Bewertungen auf K mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Die Körper M_1 und M_2 seien maximal bewertete Erweiterungskörper von K bezüglich γ_1 bzw. γ_2 ; läßt sich dann M_2 o-isomorph in M_1 einbetten? Diese Frage wurde schon unter der Voraussetzung "K reell-abgeschlossen" beantwortet¹⁾, sie soll hier jedoch allgemein für angeordnete Körper K untersucht werden.

2.) Es sei K_1 ein Unterkörper des angeordneten Körpers K_2 und γ eine ordnungsverträgliche Bewertung von K_2 , deren Einschränkung auf K_1 nicht trivial ist. Weiter seien M_1 und M_2 maximale unmittelbare Erweiterungen von K_1 bzw. K_2 bezüglich γ . Wir wollen dann untersuchen, ob sich M_1 o-isomorph in M_2 einbetten läßt.

Wir wenden uns nun der ersten Frage zu und beweisen einige vorbereitende Lemmata und Sätze.

Ist $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine pseudokonvergente Folge in einem mit ψ bewerteten Körper, so gilt, wie schon Ostrowski gezeigt hat²⁾, eine der beiden folgenden Aussagen:

$$(A) \quad \psi(a_\xi) < \psi(a_\delta) \quad \bigwedge \xi, \delta: \quad \xi < \delta < \zeta.$$

$$(B) \quad \bigvee \eta < \zeta: \bigwedge \xi, \delta: \eta < \xi < \delta < \zeta \quad \text{gilt: } \psi(a_\xi) = \psi(a_\delta).$$

Außerdem gibt es für jedes Polynom f aus $K[x]$ eine Ordinalzahl $\eta(f) < \zeta$, so daß $(f(a_\xi))_{\eta(f) < \xi < \zeta}$ ebenfalls eine pseudokonvergente Folge in K ist. Wie von Kaplansky eingeführt³⁾, wollen wir nun zwischen pseudokonvergenten Folgen von transzendtem Typ und von algebraischem Typ unterscheiden. Die pseudokonvergente Folge $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ heißt "von transzendtem Typ", wenn für jedes Polynom f aus $K[x]$ die pseudokonver-

1) siehe Lit. [11], Seite 384, Satz 13

2) siehe Lit. [10]

3) siehe Lit. [6], Seite 306

gente Folge $(f(a_{\xi}))_{\eta(f) < \xi < \zeta}$ die Eigenschaft (B) besitzt; andernfalls heißt $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ "von algebraischem Typ". Im letzteren Fall gibt es mindestens ein Polynom g aus $K[x]$, so daß $(g(a_{\xi}))_{\eta(g) < \xi < \zeta}$ die Aussage (A) erfüllt; man kann also, auf diese Eigenschaft bezogen, ein Polynom q aus $K[x]$ minimalen Grades wählen, welches dann irreduzibel über K ist. Ist q normiert, so sprechen wir vom "zugehörigen Minimalpolynom von $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ ".

(2.1) Lemma:

Es sei Ψ eine Bewertung des Körpers K und $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ eine pseudokonvergente Folge in K . Dann ist $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ dann und nur dann von transzendtem Typ, falls für jedes Polynom f aus $K[x]$ die pseudokonvergente Folge $(f(a_{\xi}))_{\eta(f) < \xi < \zeta}$ keinen Pseudolimes in K besitzt.

Beweis:

- 1) Sei $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ eine pseudokonvergente Folge von transzendtem Typ, und nehmen wir an, es existiere ein Polynom f aus $K[x]$ vom Grade ≥ 1 , so daß $(f(a_{\xi}))_{\eta(f) < \xi < \zeta}$ einen Pseudolimes z in K besitzt. Dann definieren wir $g(x) := f(x) - z$; folglich ist für alle ξ mit $\eta(f) < \xi < \zeta$: $g(a_{\xi}) = f(a_{\xi}) - z$, und es gilt: $\Psi(g(a_{\xi})) = \Psi(f(a_{\xi}) - z) = \Psi(f(a_{\xi+1}) - f(a_{\xi}))$, letzteres nach der Definition des Pseudolimes. Damit ist aber $(\Psi(g(a_{\xi})))_{\eta(f) < \xi < \zeta}$ eine streng monoton steigende Folge in der Wertegruppe $\overline{T}_{\Psi}$, und folglich ist, im Widerspruch zur Voraussetzung, $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ von algebraischem Typ. Also existiert für $f \in K[x]$ mit $\text{grad } f \geq 1$ kein Pseudolimes von $(f(a_{\xi}))_{\eta(f) < \xi < \zeta}$.
- 2) Nehmen wir an, keine der pseudokonvergenten Folgen $(f(a_{\xi}))_{\eta(f) < \xi < \zeta}$ ($f \in K[x]$, $\text{grad } f \geq 1$) habe einen Pseudolimes in K und $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ wäre von algebraischem Typ. Dann existiert ein Polynom h aus $K[x]$ mit der Eigenschaft: $(\Psi(h(a_{\xi})))_{\eta(h) < \xi < \zeta}$ ist streng monoton steigend in $\overline{T}_{\Psi}$. Damit ist aber stets $\Psi(h(a_{\xi+1}) - h(a_{\xi})) = \min\{\Psi(h(a_{\xi+1})), \Psi(h(a_{\xi}))\} = \Psi(h(a_{\xi}))$, und

es folgt für die zu $(h(a_{\mathfrak{s}}))_{\eta(h) < \mathfrak{s} < \mathfrak{S}}$ gehörige Breite B_h :
 $B_h = \{x \in K : \psi(x) > \psi(h(a_{\mathfrak{s}})) \wedge \mathfrak{s} : \eta(h) < \mathfrak{s} < \mathfrak{S}\}$. Hiermit sind
 aber die Elemente von B_h genau die Pseudolimites von
 $(h(a_{\mathfrak{s}}))_{\eta(h) < \mathfrak{s} < \mathfrak{S}}$, und wegen $0 \in B_h$ ist $B_h \neq \emptyset$. Folglich
 existieren, im Widerspruch zur Voraussetzung, Pseudolimites
 von $(h(a_{\mathfrak{s}}))_{\eta(h) < \mathfrak{s} < \mathfrak{S}}$, d.h., $(a_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} < \mathfrak{S}}$ ist von transzendente
 Typ.

(2.2) Folgerung:

Die pseudokonvergente Folge $(a_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} < \mathfrak{S}}$ ist dann und nur
 dann von algebraischem Typ, wenn ein Polynom f aus
 $K[x]$ mit $\text{grad } f \geq 1$ existiert, so daß die pseudokon=
 vergente Folge $(f(a_{\mathfrak{s}}))_{\eta(f) < \mathfrak{s} < \mathfrak{S}}$ einen Pseudolimes
 in K besitzt.

Wir wollen nun eine Aussage über den Grad des Minimal=
 polynoms einer pseudokonvergenten Folge von algebraischem
 Typ anschließen:

(2.3) Lemma:

Es sei ψ eine Bewertung des Körpers K und $(a_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} < \mathfrak{S}}$
 eine pseudokonvergente Folge von algebraischem Typ
 in K mit zugehörigem Minimalpolynom $q(x)$ aus $K[x]$.
 Es ist dann und nur dann $n = \text{grad } q$, wenn alle pseudo=
 konvergenten Folgen $(f(a_{\mathfrak{s}}))_{\eta(f) < \mathfrak{s} < \mathfrak{S}}$ mit $f \in K[x]$ und
 $1 \leq \text{grad } f < n$ keinen Pseudolimes in K haben, und
 wenn n die größte natürliche Zahl mit dieser Eigen=
 schaft ist.

Beweis:

1) Sei $n = \text{grad } q$ und nehmen wir an, es existiere ein Polynom
 f aus $K[x]$ mit $1 \leq \text{grad } f < n$, so daß $(f(a_{\mathfrak{s}}))_{\eta(f) < \mathfrak{s} < \mathfrak{S}}$ einen
 Pseudolimes z in K besitzt. Dies führt man analog wie im
 Teil 1) des Beweises von Lemma (2.1) zu einem Widerspruch.

Da q Minimalpolynom von $(a_{\xi})_{\xi < \xi}$ ist, sind, wie schon gezeigt wurde (siehe Teil 2) des Beweises von Lemma (2.1)), die Elemente der Breite $B_q \neq \emptyset$ von $(q(a_{\xi}))_{\eta(q) < \xi < \xi}$ die Pseudolimites von $(q(a_{\xi}))_{\eta(q) < \xi < \xi}$. Damit ist wegen $n = \text{grad } q$ n die größte natürliche Zahl mit der eben bewiesenen Eigenschaft.

2) Setzen wir voraus, n habe die oben erwähnte Eigenschaft, und $h \in K[x]$ sei ein Polynom mit $\text{grad } h = n$, so daß die pseudokonvergente Folge $(h(a_{\xi}))_{\eta(h) < \xi < \xi}$ einen Pseudolimes in K besitzt. Wir wollen zeigen, daß dann der Grad des Minimalpolynoms $q(x)$ gleich n ist.

Als Minimalpolynom von $(a_{\xi})_{\xi < \xi}$ erfüllt die pseudokonvergente Folge $(q(a_{\xi}))_{\eta(q) < \xi < \xi}$ die Bedingung (A) auf Seite 31; folglich sind die Elemente der zugehörigen Breite $B_q \neq \emptyset$ die Pseudolimites von $(q(a_{\xi}))_{\eta(q) < \xi < \xi}$. Aus der Maximalitätseigenschaft von n folgt hieraus: $n = \text{grad } h \leq \text{grad } q$. Sei nun $z \in K$ ein Pseudolimes von $(h(a_{\xi}))_{\eta(h) < \xi < \xi}$ und $h^*(x) := h(x) - z$. Dann gilt wieder für alle ξ mit $\eta(h) < \xi < \xi$: $\psi(h^*(a_{\xi})) = \psi(h(a_{\xi}) - z) = \psi(h(a_{\xi+1}) - h(a_{\xi}))$. Damit bildet $(\psi(h^*(a_{\xi})))_{\eta(h) < \xi < \xi}$ eine streng monoton steigende Folge in T_{ψ} , d.h. die pseudokonvergente Folge $(h^*(a_{\xi}))_{\eta(h) < \xi < \xi}$ erfüllt die Bedingung (A) auf Seite 31. Wegen der Minimalität von $q(x)$ gilt damit: $\text{grad } q \leq \text{grad } h^* = \text{grad } h = n$, und man erhält: $\text{grad } q = n$.

Im folgenden wenden wir uns wieder ordnungsverträglichen Bewertungen angeordneter Körper zu.

(2.4) Lemma:

K sei ein angeordneter Körper und $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ seien zwei ordnungsverträgliche Bewertungen auf K mit $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$. Dann gilt:

- (a) Ist $(a_{\xi})_{\xi < \xi}$ bezüglich $\mathcal{V}_2$ eine pseudokonvergente Folge, so auch bezüglich $\mathcal{V}_1$.
- (b) Ist $(a_{\xi})_{\xi < \xi}$ eine bezüglich $\mathcal{V}_2$ pseudokonvergente Folge in K , so ist ein $g \in K$ dann und nur dann

bezüglich $\mathcal{V}_2$ ein Pseudolimes von $(a_g)_{g < \xi}$, wenn g bezüglich $\mathcal{V}_1$ ein Pseudolimes von $(a_g)_{g < \xi}$ ist.

Beweis:

Die Aussage (a) folgt sofort mit der Definition der Pseudokonvergenz (siehe S. 4).

Zu (b): Wegen (a) ist $(a_g)_{g < \xi}$ sowohl bezüglich $\mathcal{V}_2$ als auch bezüglich $\mathcal{V}_1$ pseudokonvergent, die zugehörigen Breiten sind

$$B_1 = \{x \in K : \mathcal{V}_1(x) > \mathcal{V}_1(a_{\xi+1} - a_\xi) \wedge \xi < \xi\};$$

$$B_2 = \{y \in K : \mathcal{V}_2(y) > \mathcal{V}_2(a_{\xi+1} - a_\xi) \wedge \xi < \xi\}.$$

Mit Bemerkung (1.2)(a) folgt sofort: $B_1 \supseteq B_2$. Da die Folge $(\mathcal{V}_2(a_{\xi+1} - a_\xi))_{\xi < \xi}$ in $\mathcal{V}_2$ streng monoton steigend ist, gilt wegen Bemerkung (1.2)(b) auch $B_2 \supseteq B_1$, und somit ist $B_1 = B_2 =: B$. Nun ist aber nach Bemerkung (1.17) $g \in K$ ein Pseudolimes von $(a_g)_{g < \xi}$ falls $g+B$ ein Limes von $(a_g+B)_{g < \xi}$ in K/B ist, und zwar bezüglich $\mathcal{V}_1$ als auch bezüglich $\mathcal{V}_2$.

Es soll nun die Frage behandelt werden, ob auch die Eigenschaften "von transzendenter Typ" bzw. "von algebraischem Typ" beim Übergang von $\mathcal{V}_2$ auf $\mathcal{V}_1$ erhalten bleiben.

(2.5) **Satz:**

Seien $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ zwei ordnungsverträgliche Bewertungen des angeordneten Körpers K mit $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$. Dann gilt:

- (a) Ist $(a_g)_{g < \xi}$ bezüglich $\mathcal{V}_2$ eine pseudokonvergente Folge von transzendenter Typ, so auch bezüglich $\mathcal{V}_1$.
- (b) Ist $(a_g)_{g < \xi}$ bezüglich $\mathcal{V}_2$ eine pseudokonvergente Folge von algebraischem Typ und $q(x)$ ein zugehöriges Minimalpolynom, so ist $(a_g)_{g < \xi}$ auch bezüglich $\mathcal{V}_1$ von algebraischem Typ und $q(x)$ ist ein zugehöriges Minimalpolynom.

Beweis:

Zu (a): $(a_g)_{g < \xi}$ sei bezüglich $\mathcal{V}_2$ pseudokonvergent und von

transzendente Typ. Nach Lemma (2.1) haben dann keine der pseudokonvergenten Folgen $(f(a_s))_{s < \xi}$ mit $f \in K[x]$ und $\text{grad } f \geq 1$ einen Pseudolimes bezüglich $\mathcal{I}_2$ in K . Wegen Lemma (2.4) sind dann die Folgen $(f(a_s))_{s < \xi}$ auch bezüglich $\mathcal{I}_1$ pseudokonvergent und besitzen keinen Pseudolimes in K . Mit Lemma (2.1) folgt hiermit: $(a_s)_{s < \xi}$ ist bezüglich $\mathcal{I}_1$ von transzendente Typ.

Zu (b): Sei $(a_s)_{s < \xi}$ bezüglich $\mathcal{I}_2$ eine pseudokonvergente Folge von algebraischem Typ mit zugehörigem Minimalpolynom $q(x)$, und es sei $\text{grad } q = n$. Dann gilt, nach der Definition des Minimalpolynoms:

$$\mathcal{I}_2(q(a_s)) < \mathcal{I}_2(q(a_\mu)) \quad \wedge \quad s, \mu: s < \mu < \xi.$$

Da $\mathcal{I}_1$ feiner als $\mathcal{I}_2$ vorausgesetzt war, folgt hiermit:

$$\mathcal{I}_1(q(a_s)) < \mathcal{I}_1(q(a_\mu)) \quad \wedge \quad s, \mu: s < \mu < \xi;$$

d.h.: $(a_s)_{s < \xi}$ ist auch bezüglich $\mathcal{I}_1$ von algebraischem Typ. Zu zeigen ist nur noch, daß $q(x)$ auch bezüglich $\mathcal{I}_1$ ein zugehöriges Minimalpolynom ist. Dazu sei $h(x)$ ein Polynom aus $K[x]$ mit $1 \leq \text{grad } h < n = \text{grad } q$. Dann hat nach Lemma (2.3) die pseudokonvergente Folge $(h(a_s))_{s < \xi}$ bezüglich $\mathcal{I}_2$ keinen Pseudolimes in K und somit nach Lemma (2.4)(b) auch nicht bezüglich $\mathcal{I}_1$. Folglich ist wegen Lemma (2.3) $q(x)$ bezüglich $\mathcal{I}_1$ ein Minimalpolynom von $(a_s)_{s < \xi}$.

Theorem 2 von Kaplansky¹⁾ besagt nun, daß zu einer pseudokonvergenten Folge $(a_s)_{s < \xi}$ des mit " Ψ " bewerteten Körpers K , falls diese von transzendente Typ ist, eine unmittelbare, transzendente Erweiterung $K(z)$ existiert, so daß die Bewertung Ψ auf $K(z)$ fortgesetzt werden kann und dabei z ein Pseudolimes von $(a_s)_{s < \xi}$ ist. Weiter ist jede einfache Erweiterung $K(u)$ mit einer Ψ fortsetzenden Bewertung, bei der u ein Pseudolimes von $(a_s)_{s < \xi}$ ist, bewertungsisomorph zu $K(z)$. Diese, bis auf Bewertungsisomorphie eindeutig be-

¹⁾ siehe Lit. [6], Seite 306, Theorem 2

stimmte, einfache, transzendente Erweiterung indizieren wir im folgenden mit der zugehörigen Bewertung, falls diese nicht aus dem Zusammenhang hervorgeht.

Seien nun $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ ordnungsverträgliche Bewertungen des angeordneten Körpers K mit $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$, und sei $(a_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} < \mathfrak{s}}$ eine bezüglich $\mathcal{V}_2$ pseudokonvergente Folge von transzendente Typ. Dann folgt mit Satz (2.5), daß $(a_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} < \mathfrak{s}}$ auch bezüglich $\mathcal{V}_1$ pseudokonvergent von transzendente Typ ist. Damit sind die nach Kaplanskys Theorem 2 gebildeten transzendenten Erweiterungen $K(z_1)_{\mathcal{V}_1}$ und $K(z_2)_{\mathcal{V}_2}$ trivialerweise algebraisch isomorph. Nach Kaplansky erhält man die bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte Fortsetzung der Bewertungen $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ auf $K(z_1)_{\mathcal{V}_1}$ bzw. $K(z_2)_{\mathcal{V}_2}$ folgendermaßen: Für $f(z_i) \in K[z_i]$ ($i = 1, 2$) mit $\text{grad } f \geq 1$ gilt:

$$\mathcal{V}_i(f(z_i)) = \gamma \Leftrightarrow \forall \lambda: \lambda < \mathfrak{s} : \bigwedge \mathfrak{s} \text{ mit } \lambda \leq \mathfrak{s} < \mathfrak{s} : \mathcal{V}_i(f(a_{\mathfrak{s}})) = \gamma.$$

Identifizieren wir $K(z_1)_{\mathcal{V}_1}$ und $K(z_2)_{\mathcal{V}_2}$ miteinander ($z_1 = z_2 =: z$), so gilt damit auch für die auf $K(z)$ fortgesetzten Bewertungen $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$: $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$.

Wenden wir uns nun dem algebraischen Fall zu. Theorem 3 von Kaplansky¹⁾ besagt: Ist K ein Körper mit einer Bewertung Ψ , und ist $(b_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} < \mathfrak{s}}$ eine pseudokonvergente Folge von algebraischem Typ in K , mit Minimalpolynom $q(x)$, aber ohne Pseudolimes in K , so existiert eine unmittelbare, algebraische Erweiterung $K(t)$ von K sowie eine Fortsetzung von Ψ auf $K(t)$, so daß gilt:

- i) $q(t) = 0$;
- ii) für alle Polynome $f \in K[x]$ mit $1 \leq \text{grad } f < \text{grad } q$ ist $\Psi(f(x))$ definiert wie im transzendenten Fall;
- iii) t ist Pseudolimes von $(b_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} < \mathfrak{s}}$.

Weiter ist jede Erweiterung $K(u)$ von K mit einer Ψ fortsetzenden Bewertung, bezüglich welcher u Pseudolimes von

¹⁾ siehe Lit. [6], Seite 308, Theorem 3

$(b_{\xi})_{\xi < \xi}$ und Nullstelle von $q(x)$ ist, mit $K(t)$ bewertungs-
isomorph.

$\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ seien wiederum zwei ordnungsverträgliche Bewertungen des angeordneten Körpers K mit $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$, $(b_{\xi})_{\xi < \xi}$ sei eine bezüglich $\mathcal{V}_2$ pseudokonvergente Folge von algebraischem Typ, jedoch ohne Pseudolimes in K , und $q(x)$ sei ein zugehöriges Minimalpolynom. Nach Satz (2.5) ist dann $(b_{\xi})_{\xi < \xi}$ auch eine bezüglich $\mathcal{V}_1$ pseudokonvergente Folge von algebraischem Typ, ohne Pseudolimes in K und mit $q(x)$ als Minimalpolynom. Da $q(x)$ irreduzibel über K ist, sind damit die nach Kaplanskys Theorem 3 gebildeten, einfachen, algebraischen Erweiterungen $K(t_1)_{\mathcal{V}_1}$ und $K(t_2)_{\mathcal{V}_2}$ algebraisch isomorph. Identifiziert man diese beiden Erweiterungen miteinander ($t_1 = t_2 =: t$), so folgt, da für alle Polynome $f \in K[x]$ mit $1 \leq \text{grad } f < \text{grad } q$ die Bewertungen $\mathcal{V}_i(f(t_i))$ ($i = 1, 2$) wie im transzendenten Fall definiert werden, auch hier: Für die auf $K(t)$ fortgesetzten, bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmten Bewertungen $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ gilt auf $K(t)$ ebenfalls: $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$.

Wir können nun das folgende Lemma beweisen.

(2.6) Lemma:

Seien $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ zwei ordnungsverträgliche Bewertungen eines angeordneten Körpers K mit $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$. M_1 und M_2 seien maximale unmittelbare Erweiterungen von K bezüglich $\mathcal{V}_1$ bzw. $\mathcal{V}_2$. Dann läßt sich M_2 isomorph in M_1 einbetten, und für die bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmten Fortsetzungen von $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ auf M_1 bzw. M_2 gilt auf M_2 : $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$ (M_2 werde dabei mit seinem isomorphen Bild in M_1 identifiziert).

Beweis:

Theorem 4 von Kaplansky¹⁾ sagt aus, daß ein bewerteter

¹⁾ siehe Lit. [6], Seite 309, Theorem 4

Körper dann und nur dann maximal bewertet ist, wenn er zu jeder pseudokonvergenten Folge einen Pseudolimes enthält. Will man also eine maximale unmittelbare Erweiterung eines bewerteten Körpers K konstruieren, so muß man ihn bezüglich seiner pseudokonvergenten Folgen, Theorem 2 und 3 von Kaplansky folgend, "vervollständigen". Dazu bildet man durch eine transfinite Folge dieser Adjunktionen von Pseudolimes pseudokonvergenter Folgen aus K eine Erweiterung E von K mit einer die Bewertung von K fortsetzenden Bewertung, so daß E zu jeder pseudokonvergenten Folge aus K einen Pseudolimes besitzt. Dieser Prozeß kann wiederholt werden, das heißt, wir können eine Folge (E_ξ) von aufeinanderfolgenden Erweiterungen konstruieren, indem wir festsetzen:

- 1.) Hat die Ordinalzahl ξ einen Vorgänger $(\xi-1)$, so werde E_ξ als Erweiterung von $E_{\xi-1}$ so konstruiert, wie oben E von K ; dabei sei $E_0 := K$.
- 2.) Ist ξ eine Limeszahl, so sei $E_\xi := \bigcup_{\zeta < \xi} E_\zeta$.

Über Kardinalitätsbetrachtungen erhält man sofort, daß diese Folge konstant werden muß, also bei einer maximalen unmittelbaren Erweiterung endet¹⁾. Nach Theorem 5 von Kaplansky²⁾ ist diese bis auf Bewertungsisomorphie bezüglich K eindeutig bestimmt.

Sei nun M_1 bzw. M_2 die maximale unmittelbare Erweiterung von K bezüglich $\mathcal{V}_1$ bzw. $\mathcal{V}_2$. Nach den vorher angestellten Überlegungen über die Adjunktion der Pseudolimes bezüglich $\mathcal{V}_2$ pseudokonvergenter Folgen aus K können wir dann sagen: Ist $(a_\xi)_{\xi < \xi}$ eine bezüglich $\mathcal{V}_2$ pseudokonvergente Folge aus K ohne Pseudolimes in K , so gilt dasselbe bezüglich $\mathcal{V}_1$, die zugehörigen einfachen Erweiterungen $K(z)_{\mathcal{V}_1}$ und $K(z)_{\mathcal{V}_2}$ sind isomorph und für die auf $K(z)$ bis auf Äquivalenz eindeutig fortgesetzten Bewertungen $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ ist $\mathcal{V}_1 \prec \mathcal{V}_2$ (z ist dabei bezüglich $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ ein Pseudo=

1) hierauf wird in §4 noch näher eingegangen

2) siehe Lit. [6], Seite 312, Theorem 5

limes von $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$). Da M_1 eine maximale unmittelbare Erweiterung von K bezüglich $\mathcal{V}_1$ ist, enthält M_1 einen Pseudolimes von $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ bezüglich $\mathcal{V}_1$ (nach Lemma (2.4)(b) ist dieser auch bezüglich $\mathcal{V}_2$ ein Pseudolimes von $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$). Damit können wir o.B.d.A. z aus M_1 wählen, das heißt, $K(z)$ ist ein Unterkörper von M_1 . Da man $E_1^{(2)}$ (wie oben E_1 , nur bezüglich der Bewertung $\mathcal{V}_2$ definiert) durch sukzessives Adjungieren von Pseudolimites erhält, können wir $E_1^{(2)}$ als Unterkörper von M_1 auffassen, auf dem für die bis auf Äquivalenz eindeutig fortgesetzten Bewertungen $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ gilt: $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$. Diese Aussage kann man analog für jedes Glied der Folge $(E_{\xi}^{(2)})$ beweisen. Folglich enthält M_1 , da ja $(E_{\xi}^{(2)})$ bei einer maximalen unmittelbaren Erweiterung von K bezüglich $\mathcal{V}_2$ konstant wird und diese bis auf Bewertungsisomorphie bezüglich K eindeutig bestimmt ist, einen zu M_2 isomorphen Unterkörper, auf welchem für die bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmten Fortsetzungen von $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ auf M_1 bzw. M_2 gilt: $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$.

Wir wollen jetzt noch die Frage der Fortsetzung der Anordnung eines ordnungsverträglich bewerteten, angeordneten Körpers auf dessen unmittelbaren Erweiterungen behandeln. Diese fortgesetzte Anordnung soll dabei natürlich mit der fortgesetzten Bewertung verträglich sein.

(2.7) Bemerkung: (Conrad u. Dauns)

Es sei K ein angeordneter Körper mit einer ordnungsverträglichen Bewertung $\mathcal{V}$. L sei eine unmittelbare Erweiterung von K . Dann gibt es genau eine die Anordnung von K fortsetzende Anordnung von L , die mit der bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte Fortsetzung von $\mathcal{V}$ auf L verträglich ist.

Beweis:

Da L eine unmittelbare Erweiterung von K ist, wird durch

$\tau(k+K_\theta) := k+L_\theta$ ein Körperisomorphismus definiert. Auf K^θ/K_θ wird durch die Anordnung von K eine Anordnung induziert; da die Anordnung von L die von K fortsetzen soll, ist dadurch mittels τ auf L^θ/L_θ eine Anordnung schon vorgegeben. Wir wollen zeigen, daß es genau eine Anordnung von L gibt, so daß die durch sie auf L^θ/L_θ induzierte mit dieser übereinstimmt. Hierzu definieren wir nach Conrad und Dauns:¹⁾

$$\text{Für } d \in L \text{ sei } d > 0 :\Leftrightarrow \forall k \in K, k > 0 : \gamma(k) = \gamma(d) \wedge (d k^{-1}) + L_\theta > 0 + L_\theta \text{ in } L^\theta/L_\theta.$$

Man kann leicht zeigen, daß hierdurch eine Anordnung auf L definiert wird, welche offensichtlich die von K fortsetzt. Zu zeigen ist dann nur noch, daß diese mit der Bewertung auf L verträglich ist, das heißt, daß aus $0 < a < b$ mit $a, b \in L$ folgt: $\gamma(a) \geq \gamma(b)$. Angenommen, es sei $\gamma(a) < \gamma(b)$. Wegen $a > 0$ bzw. $b > 0$ existieren Elemente $k_1, k_2 \in K$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ mit: $\gamma(k_1) = \gamma(a)$ und $a k_1^{-1} > 0$ bzw. $\gamma(k_2) = \gamma(b)$ und $b k_2^{-1} > 0$. Da γ auf K ordnungsverträglich ist, gilt wegen $\gamma(k_1) < \gamma(k_2) : 0 < k_2 < k_1$; also ist $(b-a) > 0$, $(k_2-k_1) < 0$ und somit $(b-a)(k_2-k_1) < 0$. Außerdem ist $\gamma((b-a)(k_2-k_1)) = \gamma(b-a) - \gamma(k_2-k_1) = \gamma(a) - \gamma(k_1) = \theta$. Nach der obigen Definition der Anordnung auf L ist hiernach $(b-a) \leq 0$ und damit, im Widerspruch zur Voraussetzung, $a \geq b$.

Umgekehrt muß für jede Anordnung von L , die unsere Bedingungen erfüllt, die in der obigen Definition enthaltene Aussage gelten, denn: Für $d > 0$, $k > 0$ ist auch $d k^{-1} > 0$, und damit muß wegen $\gamma(d k^{-1}) = \theta$ in L^θ/L_θ $(d k^{-1}) + L_\theta > 0 + L_\theta$ sein; das heißt, unsere Anordnung ist die einzig mögliche.

Damit folgt, als Verschärfung der Aussage von Lemma (2.6), der Satz:

¹⁾ siehe Lit. [4], Seite 392

(2.8) Satz:

K sei ein angeordneter Körper und f eine ordnungsverträgliche Bewertung auf K . Dann gilt:

- (a) Ist M eine maximale unmittelbare Erweiterung von K , so kann M stets so angeordnet werden, daß die Anordnung von K fortgesetzt wird und f auf M ordnungsverträglich ist. M ist hierbei bis auf o -Isomorphie bezüglich K eindeutig bestimmt.
- (b) Ist f' eine weitere ordnungsverträgliche Bewertung von K mit $f' < f$, und ist M' eine maximale unmittelbare Erweiterung von K bezüglich f' , so kann man, wie in (a), die Anordnung von K auf M' fortsetzen, und es gilt: M läßt sich o -isomorph in M' einbetten.

Beweis:

Zu (a): M ist bis auf Bewertungsisomorphie bezüglich K eindeutig bestimmt; mit Bemerkung (2.7) folgt damit unsere Aussage.

Zu (b): Nach Lemma (2.6) kann man M isomorph in M' einbetten, so daß für die bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmten, auf M bzw. M' fortgesetzten Bewertungen f und f' auf M gilt: $f' < f$. Die Fortsetzung der Anordnung von K auf M bzw. M' ist nach (a) eindeutig bestimmt. Da auf M f' feiner als f und f' auf M' ordnungsverträglich ist, muß f' , und damit auch f , mit der auf M eingeschränkten Anordnung von M' verträglich sein. Da die Anordnung von M' aber eindeutig bestimmt ist, folgt damit, daß unser obiger Monomorphismus ein o -Monomorphismus ist.

Wir wenden uns nun unserer zweiten Fragestellung zu. Sei K_1 ein Unterkörper des angeordneten Körpers K_2 , und sei γ eine ordnungsverträgliche Bewertung von K_2 , deren Einschränkung auf K_1 nicht trivial ist. Wir wollen untersuchen, ob sich dann die maximale unmittelbare Erweiterung M_1 von K_1 mit der nach Satz (2.8)(a) eindeutig bestimmten Anordnung in M_2 einbetten läßt, wenn M_2 die maximale unmittelbare Erweiterung von K_2 ist.

Hierzu soll das folgende Lemma von Ostrowski¹⁾ zitiert werden.

(2.9) Lemma: (Ostrowski)

Seien $\beta_1, \dots, \beta_m$ Elemente einer angeordneten abelschen Gruppe T , sei $(p_\xi)_{\xi < \mathfrak{s}}$ eine wohlgeordnete, streng monoton steigende Folge mit Elementen aus T , und sei $\mathfrak{s}$ eine Limesordinalzahl. Weiter seien $t_1, \dots, t_m$ verschiedene, positive ganze Zahlen. Dann existiert eine Ordinalzahl $\mu < \mathfrak{s}$ und eine ganze Zahl k ($1 \leq k \leq m$), so daß für alle $i \neq k$ und für alle Ordinalzahlen ξ mit $\mu < \xi < \mathfrak{s}$ gilt:

$$\beta_i + t_i p_\xi > \beta_k + t_k p_\xi.$$

Das folgende Lemma hat Kaplansky²⁾ für $\text{char } K = p \neq 0$ und der etwas stärkeren Voraussetzung " $q(x) \in K[x]$ sei Minimalpolynom" bewiesen. Dieser Beweis läßt sich, wie Kaplansky bemerkt, leicht auf den Fall $\text{char } K = 0$ zurückführen, und man kann ihn, wie wir der Vollständigkeit halber zeigen werden, auch mit etwas abgeschwächten Voraussetzungen so führen.

Im folgenden bezeichnen wir für $1 \leq i \leq n$ und $q(x) \in K[x]$ mit $\text{grad } q := n \geq 1$ die i -te Ableitung von $q(x)$ mit $q^{(i)}(x)$.

¹⁾ siehe Lit. [10]

²⁾ siehe Lit. [6], Seite 312, Lemma 11

(2.10) Lemma: (Kaplansky)

Es sei K ein Körper mit einer Bewertung Ψ und M eine maximale unmittelbare Erweiterung von K . $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ sei eine pseudokonvergente Folge von algebraischem Typ aus K , die in K keinen Pseudolimes besitzt. Weiter sei $q(x)$ ein Polynom aus $K[x]$ mit der Eigenschaft:

- i) Die pseudokonvergente Folge $(q(a_\xi))_{\eta_\xi < \xi < \zeta}$ erfüllt die Bedingung (A) von Seite 31, d.h.: Die Folge $(\Psi(q(a_\xi)))_{\xi < \zeta}$ ist in $\mathcal{T}_\Psi$ streng monoton steigend.
- ii) Die pseudokonvergenten Folgen $(q^{(i)}(a_\xi))_{\eta_\xi < \xi < \zeta}$ ($i = 1, \dots, n := \text{grad } q$) erfüllen die Bedingung (B) von Seite 31, d.h.: Die Werte $\Psi(q^{(i)}(a_\xi))$ werden konstant.

Dann gibt es zu einem Pseudolimes $t \in M$ von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ mit $\Psi(q(t)) = \alpha \neq \infty$ ein Element $t^* \in M$ mit:

- (1) t^* ist ein Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$;
- (2) $\Psi(q(t^*)) > \alpha$;
- (3) $\Psi(t^* - t) = \alpha - \beta_1$.

Dabei sei für $1 \leq i \leq n$ β_i folgendermaßen definiert: Nach unseren Voraussetzungen nimmt die Folge $(\Psi(q^{(i)}(a_\xi)))_{\eta_\xi < \xi < \zeta}$ ab einer bestimmten Stelle einen konstanten Wert an, diesen wollen wir mit β_i bezeichnen.

Beweis: (siehe Kaplansky¹⁾, Seite 309 bis 313)

Es sei für $\xi < \zeta$ $p_\xi := \Psi(a_{\xi+1} - a_\xi)$, und wir definieren nach Kaplansky:

- (1) $\delta := \alpha - \beta_1$.

Dann behaupten wir:

- (2) Für genügend große $\nu < \zeta$ und $j = 2, \dots, n$ gilt:
 $\beta_1 + p_\nu < \beta_j + j \cdot p_\nu$.

¹⁾ siehe Lit. [6]

Die Taylorentwicklung von $q'(x)$ um die Stelle a_δ ergibt für $x = a_\xi$:

$$q'(a_\xi) - q'(a_\delta) = q^{(2)}(a_\delta) \cdot (a_\xi - a_\delta) + \frac{1}{2!} \cdot q^{(3)}(a_\delta) \cdot (a_\xi - a_\delta)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot q^{(n)}(a_\delta) \cdot (a_\xi - a_\delta)^{n-1}$$

Für große ξ und δ mit $\delta < \xi < \zeta$ gilt aber: ($1 \leq j \leq n-1$)

$$\Psi\left(\frac{1}{j!} \cdot q^{(j+1)}(a_\delta) \cdot (a_\xi - a_\delta)^j\right) = \Psi(q^{(j+1)}(a_\delta)) + j \cdot \Psi(a_\xi - a_\delta) = \beta_{j+1} + j \cdot p_\delta.$$

Nach Lemma (2.9) gibt es dann ein $\mu < \zeta$ und eine ganze Zahl k mit $1 \leq k \leq n$, so daß für alle ganzen Zahlen $i \neq k$ und für alle ν mit $\mu < \nu < \zeta$ gilt: $\beta_k + (k-1) \cdot p_\nu < \beta_1 + 1 + (1-1) \cdot p_\nu$. Folglich ist für alle ν, ξ mit $\mu < \nu < \xi < \zeta$

$$\Psi(q'(a_\xi) - q'(a_\nu)) = \beta_k + (k-1) \cdot p_\nu.$$

Andererseits ist aber $\Psi(q'(a_\xi) - q'(a_\nu)) \geq \min\{\Psi(q'(a_\xi)), \Psi(q'(a_\nu))\} = \beta_1$, falls $\xi < \zeta$ groß genug ist. Damit ist für alle ν mit $\mu < \nu < \zeta$: $\beta_1 \leq \beta_k + (k-1) \cdot p_\nu$, und, da die Folge der $(p_\xi)_{\xi < \zeta}$ streng monoton steigend ist, muß sogar $\beta_1 < \beta_k + (k-1) \cdot p_\nu$ für alle ν mit $\mu+1 < \nu < \zeta$ gelten. Folglich ist für alle $k > 1$ und für große $\nu < \zeta$: $\beta_1 + p_\nu < \beta_k + k \cdot p_\nu$, also unsere Aussage (2) bewiesen.

Wir wollen nun weiter zeigen:

$$(3) \text{ Für große } \xi < \zeta \text{ ist } \Psi(q(a_\xi)) = \beta_1 + p_\xi.$$

Mit der Taylorentwicklung von $q(x)$ um a_ξ erhält man für $x = a_\delta$:

$$q(a_\delta) = q(a_\xi) + q'(a_\xi) \cdot (a_\delta - a_\xi) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot q^{(n)}(a_\xi) \cdot (a_\delta - a_\xi)^n$$

Die Glieder auf der rechten Seite haben außer $q(a_\xi)$ für große $\xi < \zeta$ die Bewertungen:

$$\Psi\left(\frac{1}{j!} q^{(j)}(a_\xi) \cdot (a_\delta - a_\xi)^j\right) = \beta_j + j \cdot p_\xi.$$

Nach (2) ist damit $(\beta_1 + p_{\xi})$ der kleinste dieser Werte. Nun erfüllt nach unseren Voraussetzungen die pseudokonvergente Folge $(q(a_{\xi}))$ $\eta_{\xi} < \xi < \zeta$ die Bedingung (A) von Seite 31; läßt man also δ wachsen, so steigt $\Psi(q(a_{\xi}))$ streng monoton, hält man gleichzeitig ξ fest, so folgt zusammen mit obigem die Aussage (3).

Wir behaupten weiter:

(4) Für alle $\xi < \zeta$ ist $\delta' > p_{\xi}$.

Wegen $\delta = \alpha - \beta_1 = \Psi(q(t)) - \beta_1$ ist dann und nur dann $\delta' > p_{\xi}$, wenn gilt: $\Psi(q(t)) > \beta_1 + p_{\xi}$. Die Taylorentwicklung von $q(x)$ um a_{ξ} ergibt für $x = t$ aber:

$$q(t) = q(a_{\xi}) + q'(a_{\xi}) \cdot (t - a_{\xi}) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot q^{(n)}(a_{\xi}) \cdot (t - a_{\xi})^n$$

Da t ein Pseudolimes von $(a_{\xi})_{\xi < \zeta}$ ist, muß $\Psi(t - a_{\xi}) = p_{\xi}$ sein. Folglich ist für große $\xi < \zeta$: $(1 \leq j \leq n)$

$$\Psi\left(\frac{1}{j!} \cdot q^{(j)}(a_{\xi}) \cdot (t - a_{\xi})^j\right) = \beta_j + j \cdot p_{\xi}.$$

Nach (2) existiert ein $\mu < \zeta$, so daß für alle ξ mit $\mu < \xi < \zeta$ gilt: $(\beta_1 + p_{\xi}) < (\beta_j + j \cdot p_{\xi})$ für alle j mit $2 \leq j \leq n$. Da zudem nach (3) ein $\mu' < \zeta$ existiert, so daß für alle ξ mit $\mu' < \xi < \zeta$ $\Psi(q(a_{\xi})) = \beta_1 + p_{\xi}$ ist, folgt: Für alle ξ mit $\max\{\mu, \mu'\} < \xi < \zeta$ gilt:

$$\begin{aligned} \Psi(q(t)) &\geq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \Psi(q(a_{\xi})); \Psi\left(\frac{1}{i!} \cdot q^{(i)}(a_{\xi}) \cdot (t - a_{\xi})^i\right) \right\} \\ &= \beta_1 + p_{\xi}. \end{aligned}$$

Da die p_{ξ} streng monoton steigen, ist damit für alle $\xi < \zeta$ $\Psi(q(t)) > \beta_1 + p_{\xi}$, womit (4) bewiesen ist.

Sei nun u ein fest gewähltes Element aus K mit $\Psi(u) = \delta$. Dann definieren wir für $z \in K$:

$$F(z) := \frac{q(t+uz)}{q(t)}$$

Mit der Taylorentwicklung von $F(z)$ um den Punkt 0 erhält man:

$$F(z) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{u^i}{i!} \cdot \frac{q^{(i)}(t)}{q(t)} \right) \cdot z^i =: \sum_{i=0}^n A_i \cdot z^i$$

Es ist aber:

$$1.) \quad \Psi(A_0) = \Psi(1) = \theta$$

$$2.) \quad \Psi(A_1) = \delta + \beta_1 - \alpha = \delta - (\alpha - \beta_1) = \delta - \delta = \theta$$

3.) Für $2 \leq j \leq n$ gilt:

$$\begin{aligned} \Psi(A_j) &= j \cdot \Psi(u) - \Psi(j!) + \Psi(q^{(j)}(t)) - \Psi(q(t)) \\ &= j \cdot \delta + \beta_j - \alpha \\ &= j \cdot \delta + \beta_j - (\delta + \beta_1) \\ &= (j-1) \cdot \delta - (\beta_1 - \beta_j) \end{aligned}$$

Wegen (2) ist aber für große $\mathfrak{S} < \mathfrak{S}$ und für $2 \leq j \leq n$ $(\beta_1 - \beta_j) < (j-1) \cdot p_{\mathfrak{S}}$. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} \Psi(A_j) &> (j-1) \cdot \delta - (j-1) \cdot p_{\mathfrak{S}} \quad \text{für große } \mathfrak{S} < \mathfrak{S} \\ &= (j-1) \cdot (\delta - p_{\mathfrak{S}}). \end{aligned}$$

Nach (4) ist für alle $\mathfrak{S} < \mathfrak{S}$ $\delta > p_{\mathfrak{S}}$ und folglich $(\delta - p_{\mathfrak{S}}) > \theta$. Man erhält also für $2 \leq j \leq n$:

$$\Psi(A_j) > \theta.$$

Damit haben wir gezeigt, daß $F(z)$ ein Polynom aus $K^\theta[x]$ ist; bildet man darüberhinaus $F(z)$ mittels des kanonischen Homomorphismus $\pi: K^\theta \rightarrow K^\theta/K_\theta$ ab, so ist $\pi(F(z))$ in K^θ/K_θ linear, hat also dort eine Nullstelle $\overline{z_1} \neq 0 + K_\theta$.

Sei $z_1 \in M$ mit $\overline{z_1} = z_1 + K_\theta$, dann ist

$$\Psi(F(z_1)) = \Psi\left(\frac{q(t+uz_1)}{q(t)}\right) > \theta,$$

und es gilt:

$$(5) \quad \forall z_1 \in M: \Psi(q(t+uz_1)) > \Psi(q(t)).$$

Da $z_1 + K_\theta \neq 0 + K_\theta$ ist, muß außerdem $\Psi(z_1) = \theta$ sein, woraus für unser $z_1 \in M$ folgt:

$$(6) \quad \Psi(uz_1) = \Psi(u) = \delta.$$

Wegen (4) ist für alle $\xi < \zeta$ $\delta > p_\xi$, also liegt nach (6) (uz_1) in der Breite von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$. Dies ist aber gleichbedeutend mit: $t^* := t + uz_1$ ist Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$. Nach (5) bzw. (6) hat $t^* \in M$ die verlangten Eigenschaften: $\Psi(q(t^*)) > \alpha$ und $\Psi(t^* - t) = \Psi(uz_1) = \delta = \alpha - \beta_1$.

(2.11) Lemma:

Sei K_1 ein Unterkörper des angeordneten Körpers K_2 , und $\mathcal{V}$ sei eine ordnungsverträgliche Bewertung von K_2 , die auf K_1 nicht trivial ist. M_1 und M_2 seien maximale unmittelbare Erweiterungen von K_1 bzw. K_2 , die entsprechend Satz (2.8)(a) angeordnet seien. Dann gilt:

- (a) Ist $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine pseudokonvergente Folge transzendenten Typs aus K_1 und $t_1 \in M_1$ ein Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$, so existiert in M_2 ein Pseudolimes t_2 von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$, so daß $K_1(t_1)$ und $K_1(t_2)$ $\mathcal{O}$ -isomorph sind, und dies gilt für jeden Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ aus M_2 .
- (b) Ist $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine pseudokonvergente Folge algebraischen Typs aus K_1 mit zugehörigem Minimalpolynom $q(x) \in K_1[x]$ ($n := \text{grad } q > 1$) und $z_1 \in M_1$ ein Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ mit $q(z_1) = 0$, so existiert in M_2 ein Pseudolimes z_2 von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ mit $q(z_2) = 0$; d.h., $K_1(z_1)$ und $K_1(z_2)$ sind $\mathcal{O}$ -isomorph.

Beweis:

Zu (a): Da $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ auch in K_2 eine pseudokonvergente Folge ist, besitzt sie einen Pseudolimes t_2 in M_2 . Wie bereits erwähnt¹⁾, sind dann nach Kaplansky $K_1(t_1)$ und $K_1(t_2)$ zwei isomorphe, unmittelbare Erweiterungen von K_1 . Folglich ist nach Lemma (2.7) die Fortsetzung der Anordnung von K_1 auf

¹⁾ siehe Seite 36 und 37.

$K_1(t_1)$ bzw. $K_1(t_2)$ eindeutig bestimmt, also sind $K_1(t_1)$ und $K_1(t_2)$ o-isomorph. Dies gilt offensichtlich außer für t_2 auch für jeden anderen Pseudolimes von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ aus M_2 .
Zu (b): Nach Kaplansky existiert in M_1 ein Pseudolimes z_1 von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ mit $q(z_1) = 0$ ¹⁾. Wir wollen zeigen, daß es auch in M_2 einen Pseudolimes z_2 von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ gibt, der eine Nullstelle von $q(x)$ ist. Da $q(x)$ in $K_1[x]$ irreduzibel ist, wären damit $K_1(z_1)$ und $K_1(z_2)$ zwei isomorphe, unmittelbare Erweiterungen von K_1 ¹⁾. Nach Lemma (2.7) ist aber die Fortsetzung der Anordnung von K_1 auf $K_1(z_1)$ bzw. $K_1(z_2)$ eindeutig bestimmt, d.h., $K_1(z_1)$ und $K_1(z_2)$ wären sogar o-isomorph.

Die folgende Konstruktion einer Folge von Pseudolimites der pseudokonvergenten Folge $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ geht auf Kaplansky zurück ²⁾. Gezeigt werden soll im einzelnen die Existenz einer Folge (t_ξ) von Elementen aus M_2 , die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) t_ξ ist für jede Ordinalzahl ξ ein Pseudolimes von $(a_\zeta)_{\zeta < \xi}$;
- (ii) Es sei $\alpha_\xi := \gamma(q(t_\xi))$, dann ist für $\xi < \delta$ stets $\alpha_\xi < \alpha_\delta$;
- (iii) Für $\xi < \delta$ ist $\gamma(t_\delta - t_\xi) = \alpha_\xi - \beta_1$.

Wir wollen dies durch eine transfinite Induktion nachweisen. Sicher existieren in M_2 Pseudolimites von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$, und wir können daher als Induktionsvoraussetzung annehmen, daß für eine Ordinalzahl $\lambda > 0$ eine Folge $(t_\xi)_{\xi < \lambda}$ mit den oben verlangten Eigenschaften existiert. Dabei soll o.B.d.A. für alle $\xi < \lambda$ $q(t_\xi) \neq 0$ sein. Dann müssen wir ein $t_\lambda \in M_2$ so auswählen, daß auch die Folge $(t_\xi)_{\xi < (\lambda+1)}$ diese Eigenschaften besitzt. Hierzu unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:

¹⁾ siehe Seite 37

²⁾ siehe Lit. [6], S. 313-314

Fall 1): Die Ordinalzahl λ hat einen direkten Vorgänger $(\lambda-1)$. Die pseudokonvergente Folge $(a_\xi)_{\xi < \lambda}$ und das Polynom $q(x) \in K_2[X]$ erfüllen, bezogen auf K_2 , die Voraussetzungen von Lemma (2.10). Folglich existiert zu unserem Pseudo= limes $t_{\lambda-1}$ ein Pseudolimes $t^* \in M_2$, so daß gilt:

$$\gamma(q(t^*)) > \gamma(q(t_{\lambda-1})) = \alpha_{\lambda-1} \text{ und } \gamma(t^* - t_{\lambda-1}) = \alpha_{\lambda-1} - \beta_1.$$

Definiert man $t_\lambda := t^*$, so erfüllt $(t_\xi)_{\xi < \lambda+1}$ offensichtlich die Bedingungen (i) und (ii), wir müssen lediglich noch zeigen, daß auch die Bedingung (iii) erfüllt ist.

Nach obigem ist $\gamma(t_\lambda - t_{\lambda-1}) = \alpha_{\lambda-1} - \beta_1$, und da nach Induktionsvoraussetzung $\gamma(t_{\lambda-1} - t_\xi) = \alpha_\xi - \beta_1$ ist, gilt für $\xi < \lambda-1$: $\gamma(t_\lambda - t_\xi) = \gamma(t_\lambda - t_{\lambda-1} + t_{\lambda-1} - t_\xi) = \min\{\gamma(t_\lambda - t_{\lambda-1}); \gamma(t_{\lambda-1} - t_\xi)\} = \alpha_\xi - \beta_1$.

Fall 2): λ ist eine Limesordinalzahl. Da die Folge $(t_\xi)_{\xi < \lambda}$ die Bedingungen (ii) und (iii) erfüllt, ist sie in M_2 insbesondere pseudokonvergent, und da M_2 maximal bewertet ist, existiert folglich in M_2 ein Pseudolimes, den wir mit t_λ bezeichnen. Wir wollen wiederum zeigen, daß damit die Folge $(t_\xi)_{\xi < \lambda+1}$ die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt. Sicher gilt für $\xi < \lambda$:

$$(1) \quad \gamma(t_\lambda - t_\xi) = \gamma(t_{\xi+1} - t_\xi) = \alpha_\xi - \beta_1,$$

und somit ist Bedingung (iii) erfüllt. Wir müssen also nur noch zeigen, daß $(t_\xi)_{\xi < \lambda+1}$ auch die Eigenschaften (i) und (ii) besitzt.

Für $\xi < \lambda$ ist nach Induktionsvoraussetzung $(\alpha_1 - \beta_1) < (\alpha_\xi - \beta_1) = \gamma(t_\lambda - t_\xi)$. Wie wir bereits im Beweis von Lemma (2.10) unter (4)¹⁾ gezeigt haben, ist für alle Ordinalzahlen $\gamma < \xi$ $(\alpha_1 - \beta_1) = \delta > p_\gamma = \gamma(a_{\gamma+1} - a_\gamma)$. Also ist für $\xi < \lambda$:

$$\gamma(t_\lambda - t_\xi) > p_\gamma \wedge \gamma < \xi.$$

Folglich liegt $(t_\lambda - t_\xi)$ in der Breite von $(a_\xi)_{\xi < \xi}$, und da

¹⁾ siehe Seite 46

t_{ξ} ein Pseudolimes von $(a_{\xi})_{\xi < \mathfrak{s}}$ ist, muß daher auch t_{λ} einer sein. Also ist (i) erfüllt und wir müssen nur noch zeigen, daß für alle $\xi < \lambda$ gilt: $\gamma(q(t_{\lambda})) > \alpha_{\xi}$.

Hierzu zeigen wir zuerst:

(2) Für $1 \leq j \leq n$ und $\xi < \lambda$ ist $\gamma(q^{(j)}(t_{\xi})) = \beta_j$.

Mit der Taylorentwicklung von $q^{(j)}(x)$ um a_{δ} erhalten wir für $x = t_{\xi}$:

$$q^{(j)}(t_{\xi}) - q^{(j)}(a_{\delta}) = q^{(j+1)}(a_{\delta}) \cdot (t_{\xi} - a_{\delta}) + \dots + \frac{1}{(n-j)!} \cdot q^{(n)}(a_{\delta}) \cdot (t_{\xi} - a_{\delta})^{n-j}$$

Für $1 \leq i \leq (n-j)$ ist aber

$$\gamma\left(\frac{1}{i!} \cdot q^{(j+i)}(a_{\delta}) \cdot (t_{\xi} - a_{\delta})^i\right) = \gamma(q^{(j+i)}(a_{\delta})) + i \cdot \gamma(t_{\xi} - a_{\delta})$$

Da t_{ξ} ein Pseudolimes von $(a_{\xi})_{\xi < \mathfrak{s}}$ ist, ist $\gamma(t_{\xi} - a_{\delta}) = p_{\delta} = \gamma(a_{\delta+1} - a_{\delta})$; weiter ist für große $\delta < \mathfrak{s}$ $\gamma(q^{(j+i)}(a_{\delta})) = \beta_{j+i}$, und es gilt folglich:

$$\gamma\left(\frac{1}{i!} \cdot q^{(j+i)}(a_{\delta}) \cdot (t_{\xi} - a_{\delta})^i\right) = \beta_{j+i} + j \cdot p_{\delta}.$$

Da die Folge $(p_{\xi})_{\xi < \mathfrak{s}}$ streng monoton steigend ist, muß daher auch die Bewertung der rechten Seite unserer obigen Gleichung mit wachsendem δ streng monoton steigen. Folglich gilt:

$$\gamma(q^{(j)}(t_{\xi})) = \gamma(q^{(j)}(a_{\delta})) = \beta_j \quad \text{für } 1 \leq j \leq n.$$

Analog wie im Beweis von Lemma (2.10) unter (2) kann man weiter zeigen, daß für große $\nu < \lambda$ und für $2 \leq j \leq n$ gilt:

$$(3) \quad \beta_1 + p_{\nu}^* < \beta_j + j \cdot p_{\nu}^* \quad \text{mit } p_{\nu}^* := \gamma(t_{\nu+1} - t_{\nu}).$$

Dabei setzt man lediglich für a_{ξ} , a_{δ} die Elemente t_{ξ} , t_{δ} ein und benutzt, daß nach (2) für $\xi < \lambda$ und $1 \leq j \leq n$ $\gamma(q^{(j)}(t_{\xi})) = \beta_j$ ist.

Sei $\xi < \lambda$, dann erhalten wir mit der Taylorentwicklung von $q(x)$ um t_{ξ} für $x = t_{\lambda}$:

$$q(t_\lambda) = q(t_\xi) + q'(t_\xi) \cdot (t_\lambda - t_\xi) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot q^{(n)}(t_\xi) \cdot (t_\lambda - t_\xi)^n$$

Für $1 \leq j \leq n$ gilt aber wegen (2):

$$\gamma\left(\frac{1}{j!} \cdot q^{(j)}(t_\xi) \cdot (t_\lambda - t_\xi)^j\right) = \beta_j + j \cdot \gamma(t_\lambda - t_\xi) = \beta_j + j \cdot p_\xi^*.$$

Wählt man $\xi < \lambda$ groß genug, so erhält man mit (3):

$$\gamma\left(\frac{1}{j!} q^{(j)}(t_\xi) \cdot (t_\lambda - t_\xi)^j\right) \geq \beta_j + p_\xi^*.$$

Nach (1) ist $p_\xi^* = \gamma(t_\lambda - t_\xi) = \alpha_\xi - \beta_1$ und somit $\beta_1 + p_\xi^* = \alpha_\xi$. Zusammen mit der oben aufgeführten Taylorentwicklung ergibt dies: $\gamma(q(t_\lambda)) \geq \alpha_\xi \wedge \xi < \lambda$. Da die α_ξ nach Induktionsvoraussetzung streng monoton steigen, ist dies gleichbedeutend mit der gewünschten Aussage: $\gamma(q(t_\lambda)) > \alpha_\xi \wedge \xi < \lambda$. Hiermit ist aber für $(t_\xi)_{\xi < \lambda+1}$ auch die Bedingung (ii) nachgewiesen und die Existenz der Folge (t_ξ) gezeigt. Da die Kardinalität von M_2 beschränkt ist, gibt es damit wegen Bedingung (ii) sicher einen Pseudolimes $z_2 \in M_2$, für den $\gamma(q(z_2)) = \infty$, und folglich $q(z_2) = 0$ ist.

Mit Lemma (2.11) kann man den Körper K_1 durch Elemente aus M_2 bezüglich seiner pseudokonvergenten Folgen zu einer maximalen unmittelbaren Erweiterung "vervollständigen", und es folgt der Satz:

(2.12) Satz:

Sei K_1 ein Unterkörper des angeordneten Körpers K_2 , und sei γ eine ordnungsverträgliche Bewertung von K_2 , die auf K_1 nicht trivial ist. M_1 und M_2 seien maximale unmittelbare Erweiterungen von K_1 bzw. K_2 , die entsprechend Satz (2.8)(a) angeordnet seien. Dann läßt sich M_1 o-isomorph in M_2 einbetten, wobei K_1 fest bleibt.

Wie wir bereits auf Seite 24 erwähnten, können wir hier noch eine Folgerung, die sich auf die Eigenschaft "universell stetig abgeschlossen" bezieht, anschließen.

(2.13) Folgerung:

- (a) Es sei K ein angeordneter Körper, der bezüglich seiner natürlichen Bewertung V maximal bewertet ist und dessen Restklassenkörper K^θ/K_θ von V stetig abgeschlossen ist. Dann ist K universell stetig abgeschlossen.
- (b) Es sei M ein angeordneter Körper, der bezüglich einer ordnungsverträglichen Bewertung γ maximal bewertet ist. Erfüllt dann der Restklassenkörper M^θ/M_θ von γ als angeordneter Körper die Voraussetzungen von Teil (a), so ist M universell stetig abgeschlossen.

Zum Beweis dieser Folgerung benötigen wir noch ein Lemma, welches auch noch in §3 verwendet werden wird.

(2.14) Lemma: (Kaplansky)

Sei K ein angeordneter Körper, γ eine ordnungsverträgliche Bewertung von K und K henselsch bezüglich γ . Dann enthält K zu jedem Unterkörper F mit $\gamma(F \setminus \{0\}) = \{0\}$ einen Erweiterungskörper E von F mit $\gamma(E \setminus \{0\}) = \{0\}$, so daß die Einschränkung des kanonischen Epimorphismus $\tau: K^\theta \rightarrow K^\theta/K_\theta$ auf E ein θ -Isomorphismus ist.

Beweis:

Daß die Einschränkung von τ auf E ein Isomorphismus ist, zeigt man wie im Beweis von Lemma 12 von Kaplansky,¹⁾ indem

¹⁾ siehe Lit. [6], Seite 315, Lemma 12

man, statt von den Primkörpern von K bzw. K^θ/K_θ , von F bzw. $\tau(F)$ ausgeht. Nach der Definition der Anordnung von K^θ/K_θ ist aber trivialerweise τ sogar ein θ -Isomorphismus.

Im folgenden wird mehrmals der Schluß verwendet, daß ein stetig abgeschlossener, angeordneter Körper, der über einem Unterkörper L archimedisch ist, einen, bis auf θ -Isomorphismus bezüglich L eindeutig bestimmten, stetigen Abschluß $\tilde{L}$ von L enthält. Wir verweisen hierzu auf R. Baer¹⁾.

Beweis von Folgerung (2.13):

Zum Beweis von (a) bzw. (b) müssen wir zeigen, daß zu jedem Unterkörper F von K bzw. M stets auch dessen stetiger Abschluß $\tilde{F}$ in K bzw. M enthalten ist.

Zu (a): Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1): Es ist $V(F \setminus \{0\}) \neq \{0\}$. Dann ist V auf F nicht trivial, und es sei F^* eine maximale unmittelbare Erweiterung von F bezüglich V . Nach Satz (2.12) existiert aber in K eine zu F^* isomorphe Erweiterung von F , und wir können o.B.d.A. annehmen: $F \leq F^* \leq K$. Als unmittelbare Erweiterung von F hat F^* dieselbe, nicht triviale Wertegruppe, folglich ist F^* archimedisch über F , und F^* ist, wie wir bereits gezeigt haben, als maximal bewerteter Körper zudem stetig abgeschlossen, womit nach obiger Bemerkung F^* , und folglich auch K , den stetigen Abschluß $\tilde{F}$ von F enthält.

Fall 2): Es ist $V(F \setminus \{0\}) = \{0\}$. Da K nach Voraussetzung bezüglich V maximal bewertet und somit henselsch ist, existiert nach Lemma (2.14) in K ein Erweiterungskörper E von F , der zu K^θ/K_θ θ -isomorph ist. Damit ist E ein stetig abgeschlossener, über F archimedischer Unterkörper von K , der folglich auch den stetigen Abschluß $\tilde{F}$ von F enthält.

Zu (b): Auch hier unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1): Es ist $\tau(F \setminus \{0\}) \neq \{0\}$. Diesen Fall behandelt man

¹⁾ siehe Lit. [3], Seite 182, Folgerung 2.11.

völlig analog zu Fall 1) von Teil (a).

Fall 2): Es ist $f(F \setminus \{0\}) = \{0\}$. Da M bezüglich f maximal bewertet ist, existiert wiederum nach Lemma (2.14) in M ein Erweiterungskörper E von F , der zu M^θ/M_θ θ -isomorph ist. Da M^θ/M_θ als angeordneter Körper die Voraussetzungen von Teil (a) erfüllt, ist damit E universell stetig abgeschlossen. Folglich enthält K den stetigen Abschluß $\tilde{F}$ von F .

§3 ZUM HAHNSCHEN EINBETTUNGSSATZ FÜR ANGEORDNETE KÖRPER.

In diesem Paragraphen soll eine Verallgemeinerung des Hahnschen Einbettungssatzes für angeordnete Körper bewiesen werden. Die Beweisidee geht auf einen Beweis des Hahnschen Einbettungssatzes für angeordnete Körper von P. Conrad und J. Dauns¹⁾ zurück.

Zunächst wollen wir jedoch das folgende wichtige Lemma beweisen.

(3.1) Lemma:

Sei K ein angeordneter Körper und γ eine ordnungsverträgliche Bewertung auf K , bezüglich der K maximal bewertet ist. Ist die multiplikative Gruppe der positiven Elemente von K^θ/K_θ radizierbar, so ist auch die Untergruppe

$$H := \{k \in K : k > 0 \wedge \gamma(k) = \theta\}$$

der multiplikativen Gruppe K^* der positiven Elemente von K radizierbar.

Beweis:

Sei ein Element d aus H beliebig gewählt, wir wollen zeigen, daß für alle $m \in \mathbb{N}$ die m -te Wurzel $\sqrt[m]{d}$ von d ebenfalls in H liegt.

Nach Lemma (2.14) enthält K einen Unterkörper F , der zu K^θ/K_θ θ -isomorph ist. Wir wollen nun die folgende Aussage nachweisen:

$$(1) \quad \forall c \in F : \gamma(d-c) > \theta.$$

K^θ und K_θ sind konvexe Untergruppen der additiven Gruppe $(K, +)$ und sind daher, da $(K, +)$ teilbar ist, ebenfalls teilbar. Folglich sind K^θ und K_θ $\mathbb{Q}$ -Vektorräume mit $K^\theta > K_\theta$.

¹⁾ siehe Lit. [4]

Damit existiert ein Teilvektorraum U von K^θ , so daß K^θ die direkte Summe seiner Teilvektorräume K_θ und U ist. Also ist U isomorph zum Faktorraum K^θ/K_θ und damit zu F . Daher gilt für die additiven Untergruppen K^θ , K_θ und F von M : $K^\theta = K_\theta \oplus F$. Folglich läßt sich unser gewähltes Element $d \in H$ eindeutig in der Form $d = d' + c$ mit $d' \in K_\theta$ und $c \in F$ darstellen. Damit ist aber $\gamma(d-c) = \gamma(d') > \theta$, und unsere Aussage (1) ist bewiesen. Für $\lambda := c^{-1}(d-c)$ ist dann wegen $\gamma(c^{-1}(d-c)) = \gamma(d-c) - \gamma(c) = \gamma(d-c)$

$$(2) \quad d = c(1+\lambda) \quad \text{mit} \quad \gamma(\lambda) > \theta.$$

Wegen $d > 0$ muß auch $c > 0$ sein. Da F zu K^θ/K_θ isomorph und die multiplikative Gruppe der positiven Elemente von K^θ/K_θ nach Voraussetzung radizierbar ist, existiert daher in F eine m -te Wurzel $\sqrt[m]{c}$ von c , und wir müssen wegen (2) nur noch zeigen, daß in M eine m -te Wurzel $\sqrt[m]{1+\lambda}$ von $(1+\lambda)$ existiert. Hierzu müssen wir etwas weiter ausholen. Wir definieren eine Folge $(p_n)_{n < \omega_0}$ durch

$$(3) \quad p_n := \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{1}{m} \right)_{\nu} \cdot \lambda^{\nu}$$

Wegen $\gamma(\lambda) > \theta$ ist $(p_n)_{n < \omega_0}$ offensichtlich eine pseudo=konvergente Folge in K und besitzt, da K bezüglich γ maximal bewertet ist, in K einen Pseudolimes. Wir wollen zeigen, daß sogar gilt:

$$(4) \quad \text{Es gibt in } K \text{ einen Pseudolimes } t \text{ von } (p_n)_{n < \omega_0}, \\ \text{der Nullstelle des Polynoms } g(x) := x^m - 1 - \lambda \text{ ist.}$$

Wir betrachten hierzu den Unterkörper $\mathbb{Q}(\lambda)$ von K . $\mathbb{Q}(\lambda)$ ist wegen $\gamma(\lambda) > \theta$ bezüglich γ sicher nicht trivial bewertet. Sei daher N die bis auf α -Isomorphie bezüglich $\mathbb{Q}(\lambda)$ eindeutig bestimmte, maximale unmittelbare Erweiterung von $\mathbb{Q}(\lambda)$ bezüglich γ . In $\mathbb{Q}(\lambda)$ ist $(p_n)_{n < \omega_0}$ nicht

nur pseudokonvergent, sondern bezüglich der durch γ auf $\mathbb{Q}(\lambda)$ induzierten Topologie γ eine Cauchyfolge. Folglich enthält N einen Limes von $(p_n)_{n < \omega_0}$, wir zeigen, daß dieser $\sqrt[m]{1+\lambda}$ ist. $(p_n)_{n < \omega_0}$ ist sicher ebenfalls eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}(\lambda)$ bzw. N und hat, da N maximal bewertet ist, einen Limes in N . Dieser muß $(1+\lambda)$ sein, da gilt:¹⁾

$$p_n^m = \sum_{\nu=0}^n \binom{1 \cdot m}{\nu} \lambda^\nu + \sum_{\nu=n+1}^{n^*} a_\nu \lambda^\nu = (1+\lambda) + \sum_{\nu=n+1}^{n^*} a_\nu \lambda^\nu$$

mit $a_\nu \in \mathbb{Q}$,

und da somit die Folge $(p_n^m - 1 - \lambda)_{n < \omega_0}$ eine Nullfolge in $\mathbb{Q}(\lambda)$ ist. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation bezüglich γ folgt hiermit, daß der Limes von $(p_n)_{n < \omega_0}$ eine m -te Wurzel von $(1+\lambda)$ sein muß, also gilt: $\sqrt[m]{1+\lambda} \in N$. Nach Satz (2.12) können wir jedoch o.B.d.A. annehmen, daß N in K liegt, und somit gilt: Es existiert in K eine m -te Wurzel $\sqrt[m]{1+\lambda}$ von $(1+\lambda)$. Da außerdem $\sqrt[m]{1+\lambda}$ Limes, und folglich auch Pseudolimes von $(p_n)_{n < \omega_0}$ in N ist, ist $\sqrt[m]{1+\lambda}$ auch ein Pseudolimes von $(p_n)_{n < \omega_0}$ in K , womit unser Lemma bewiesen ist.

Wir können nun den folgenden Satz formulieren und analog zu P. Conrad und J. Dauns beweisen.

(3.2) Satz:

Sei M ein angeordneter Körper, der bezüglich einer ordnungsverträglichen Bewertung γ maximal bewertet ist. Ist die multiplikative Gruppe der positiven Elemente des Restklassenkörpers M^θ / M_θ radizierbar, so ist M o-isomorph zu dem Körper $H(T_\gamma, M^\theta / M_\theta)$ der formalen Potenzreihen auf T_γ mit Koeffizienten aus M^θ / M_θ .

¹⁾ siehe Lit. [7], Seite 214

Beweis:

Nach Lemma (2.14) existiert ein Unterkörper F von M , der zu M^θ/M_θ θ -isomorph ist und für den $\gamma(F \setminus \{0\}) = \{\theta\}$ ist. Weiter ist die Untergruppe $H = \{d \in M^* : \gamma(d) = \theta\}$ der multiplikativen Gruppe M^* der positiven Elemente von M nach Lemma (3.1) radizierbar und somit ein $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. Ist dann $\overline{M}^*$ die radizierbare Hülle von $(M^*, \cdot)$, so ist $\overline{M}^*$ ebenfalls ein $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, und es existiert ein Unterraum T , so daß $\overline{M}^*$ das direkte Produkt seiner Unterräume H und T ist. Da H eine Untergruppe von M^* ist, läßt sich daher jedes Element $m \in M^*$ eindeutig durch $m = h \cdot t$ mit $h \in H$ und $t \in T'$ darstellen, wobei $T' := T \cap M^*$ sei. Wir definieren nun eine Abbildung $\pi : (T' \cup F) \longrightarrow H(T_\gamma, F)$ durch folgende Festlegungen:

- i) Für $t \in T'$ sei $\pi(t) := x^{\gamma(t)} \in H(T_\gamma, F)$, wobei für $\gamma \in T_\gamma$

$$x^{\gamma(t)}(\gamma) := \begin{cases} 1 & \text{für } \gamma = \gamma(t) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{sei.}$$
- ii) Für $k \in F$ sei $\pi(k) := k \cdot x^\theta \in H(T_\gamma, F)$ mit
$$k \cdot x^\theta(\gamma) := \begin{cases} k & \text{für } \gamma = \theta \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierdurch wird offensichtlich ein θ -Monomorphismus des von $T' \cup F$ in M erzeugten Unterkörpers $L = F(T')$ in $H(T_\gamma, F)$ definiert. Da L den zu M^θ/M_θ θ -isomorphen Körper F enthält, muß der Restklassenkörper L^θ/L_θ der auf L eingeschränkten Bewertung γ ebenfalls zu M^θ/M_θ θ -isomorph sein. Außerdem gibt es für jedes Element γ aus T_γ genau ein $t \in T'$ mit $\gamma(t) = \gamma$, also muß die Wertegruppe von γ auf L ganz T_γ sein. Damit haben wir gezeigt: M ist eine maximale unmittelbare Erweiterung von L und ist als solche nach Satz (2.8)(a) bis auf θ -Isomorphie bezüglich L eindeutig bestimmt. Da seinerseits $H(T_\gamma, F)$ eine maximale unmittelbare Erweiterung von $\pi(L)$ und daher bis auf θ -Isomorphie

bezüglich $\pi(L)$ eindeutig bestimmt ist, folgt, daß man π zu einem $\mathcal{O}$ -Isomorphismus von M auf $H(T_f, F)$ erweitern kann. Damit ist aber gezeigt, daß M zu $H(T_f, M^\theta/M_\theta)$ $\mathcal{O}$ -isomorph ist.

(3.3) Folgerung:

Sei K ein angeordneter Körper und γ eine ordnungsverträgliche Bewertung von K mit der Wertegruppe T_γ und dem Restklassenkörper $\mathcal{K} = K^\theta/K_\theta$. Dann läßt sich K $\mathcal{O}$ -isomorph in den Körper $H(T_\gamma, \hat{\mathcal{K}})$ der formalen Potenzreihen auf T_γ mit Koeffizienten aus dem reellen Abschluß $\hat{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{K}$ einbetten.

Beweis:

Wir wollen zeigen, daß man K zu einem zu $H(T_\gamma, \hat{\mathcal{K}})$ $\mathcal{O}$ -isomorphen Körper M erweitern kann.

$\hat{K}$ sei der reelle Abschluß von K . Damit wird die Anordnung von K eindeutig auf $\hat{K}$ fortgesetzt. Folglich läßt sich auch die ordnungsverträgliche Bewertung γ von K auf $\hat{K}$ fortsetzen, indem man für $y \in \hat{K}$ definiert:

$$\gamma(y) := v(y) + \Delta'_\gamma \in \bar{T}/\Delta'_\gamma.$$

Dabei sei Δ'_γ die konvexe Hülle von Δ_γ in der teilbaren Hülle $\bar{T}$ von T ($\bar{T}$ ist die Wertegruppe von $\hat{K}$ bezüglich v). Wir wollen nun zeigen, daß der zugehörige Restklassenkörper $\mathcal{K}'$ der Bewertung γ auf $\hat{K}$ der reelle Abschluß $\hat{\mathcal{K}}$ des Restklassenkörpers $\mathcal{K}$ von γ auf K ist. $\mathcal{K}'$ muß reell abgeschlossen sein, denn es ist erstens jedes positive Element aus K und damit auch jedes positive Element aus $\mathcal{K}'$ ein Quadrat, und zweitens gilt analog: Jedes Polynom ungeraden Grades über $\mathcal{K}'$ besitzt eine Nullstelle in $\mathcal{K}'$.

Angenommen, es existiert ein $y \in \mathcal{K}' \setminus \mathcal{K}$, das über $\mathcal{K}$ transzendent ist. Dann wäre jedes $k \in \hat{K}$ mit $y = k + \hat{K}_\theta$ transzen-

dent über K , dies jedoch im Widerspruch dazu, daß $\hat{K}$ über K algebraisch ist. Folglich ist $\mathcal{K}'$ eine algebraische Erweiterung von $\mathcal{K}$ und somit der reelle Abschluß von $\mathcal{K}$. Nach Mac Lane¹⁾ kann man aber eine Erweiterung E von K konstruieren, so daß gilt:

- i) $K \leq E \leq \hat{K}$
- ii) $E^\theta/E_\theta \cong \hat{K}^\theta/\hat{K}_\theta \cong \hat{\mathcal{K}}$
- iii) $T_\gamma(E) = T_\gamma(K)$.

Als Unterkörper von $\hat{K}$ ist E eine bezüglich γ ordnungsverträglich bewertete o -Erweiterung von K , und, da $\hat{\mathcal{K}}$ reell abgeschlossen ist, ist der Restklassenkörper E^θ/E_θ sogar o -isomorph zu $\hat{\mathcal{K}}$. M sei jetzt die nach Satz (2.8)(a) bis auf o -Isomorphie bezüglich E eindeutig bestimmte, maximale unmittelbare Erweiterung von E . Dann ist M ein maximal o -bewerteter Körper, dessen Restklassenkörper M^θ/M_θ die Voraussetzungen von Satz (3.2) erfüllt, und der somit zu $H(T_\gamma, \hat{\mathcal{K}})$ o -isomorph ist.

¹⁾ siehe Lit. [9], Seite 427, 428, Beweis von Theorem 3, separable algebraic case.

§4 ZUR KONSTRUKTION MAXIMAL O-BEWERTETER ERWEITERUNGS- KÖRPER.

Zu einem gegebenen angeordneten Körper K mit einer ordnungsverträglichen Bewertung γ kann man, wie im Beweis von Lemma (2.6) auf Seite 38 und 39 bereits beschrieben, eine unmittelbare Erweiterung E von K konstruieren, die zu jeder pseudokonvergenten Folge aus K einen Pseudolimes besitzt. E erhält man dabei durch transfinite Adjunktion von Pseudolimites solcher pseudokonvergenter Folgen aus K , die keinen Pseudolimes in K besitzen. In der Terminologie der "B-Schnitte" besagt dies, daß man E durch "Vervollständigung" sämtlicher freier, B-eigentlicher B-Schnitte von K erhält, wobei B alle möglichen T_γ -Untergruppen von $(K, +)$ durchläuft.

Nach den Ausführungen auf den Seiten 36 bis 38 ist E bis auf o -Isomorphie bezüglich K eindeutig bestimmt, und wir können definieren:

(4.1) Definition:

Den oben beschriebenen Erweiterungskörper E von K nennen wir "die B-Erweiterung von K bezüglich γ ".

Durch wiederholtes, derartiges Erweitern kann man eine transfinite Folge (E_ξ) von unmittelbaren Erweiterungen konstruieren, indem man definiert:

- 1.) Hat die Ordinalzahl ξ einen direkten Vorgänger $(\xi - 1)$, so sei E_ξ die B-Erweiterung von $E_{\xi-1}$, und insbesondere sei $E_0 := K$.
 - 2.) Ist ξ eine Limesordinalzahl, so sei $E_\xi := \bigcup_{\delta < \xi} E_\delta$.
- Da jeder Körper E_ξ eine unmittelbare Erweiterung von K

ist, kann E_{ξ} für jede beliebige Ordinalzahl ξ nur eine beschränkte Kardinalität annehmen, also muß die Folge der E_{ξ} konstant werden. Folglich erhält man als konstantes Glied die maximale unmittelbare Erweiterung von K .

Im folgenden behandeln wir die Frage, ab welcher Stelle die oben definierte Folge $(E_{\xi})_{\xi}$ von unmittelbaren Erweiterungen von K sicher konstant ist. Hierzu formulieren wir zunächst das folgende Lemma. Dabei soll für einen dedekindschen Schnitt (A, B) in einer angeordneten Menge X die Bezeichnung "char (A, B) (Charakter von (A, B)) = (ξ, δ) " bedeuten, daß A den Konfinalitätstyp ξ und B den Koinitalitätstyp δ hat.

(4.2) Lemma:

Es sei K ein angeordneter Körper mit einer ordnungsverträglichen Bewertung φ . (S, D) sei ein freier, B -eigentlicher B -Schnitt in K . Ist dann (S', D') das Bild von (S, D) in K/B unter dem kanonischen Epimorphismus von K auf die angeordnete, additive Faktorgruppe K/B , so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Der Koinitalitätstyp der angeordneten Gruppe K/B ist λ .
- (b) Es ist $\text{char } (S, D) = (\lambda, \lambda) = \text{char } (S', D')$.
- (c) Der Konfinalitätstyp von $\mathbb{T}_{\varphi} \setminus \varphi(B)$ ist λ .
- (d) Die Länge der nach Lemma (1.16) zu (S, D) gehörigen pseudokonvergenten Folge $(a_{\xi})_{\xi < \lambda}$ ist λ .
(Die Länge einer pseudokonvergenten Folge ist nach Vereinbarung¹⁾ eine reguläre Ordinalzahl.)

Beweis:

(a) $\Leftrightarrow$ (b): Da (S, D) ein freier B -Schnitt ist, hat S' kein größtes und D' kein kleinstes Element, und es gilt: $\text{char } (S, D) = \text{char } (S', D')$. Sei nun λ der Koinitalitäts-

¹⁾ siehe Seite 13

typ der angeordneten Gruppe K/B und $(k'_\xi)_{\xi < \lambda}$ eine streng monoton fallende, mit $(K/B)^+ := \{g \in K/B : g > 0\}$ koinitiale Folge. Dann kann man eine Folge $(s'_\xi)_{\xi < \lambda}$ aus S' folgendermaßen definieren: Für alle $\xi < \lambda$ sei s'_ξ größer als alle seine Vorgänger gewählt, jedoch so, daß $(s'_\xi + k'_\xi)$ in D' liegt. Dies ist möglich, da (S', D') nach Lemma (1.7) ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in K/B ist; wegen den Voraussetzungen bezüglich $(k'_\xi)_{\xi < \lambda}$ gilt sogar: $(s'_\xi)_{\xi < \lambda}$ ist mit S' konfimal. Folglich muß λ der Konfinalitätstyp von S' sein.

Analog zeigt man, daß der Koinitialitätstyp von D' ebenfalls λ ist. Damit ist jedoch die Äquivalenz von (a) und (b) bewiesen.

(a) $\Leftrightarrow$ (c): Sei $\mathcal{S}$ der Konfinalitätstyp von $T_f \setminus \mathcal{I}(B)$ und $(\gamma_\xi)_{\xi < \mathcal{S}}$ eine mit $T_f \setminus \mathcal{I}(B)$ konfinale, streng monoton steigende Folge. Dabei ist $\mathcal{S}$ sicher größer als 1, da B eine T_f -Untergruppe ist und somit $T_f \setminus \mathcal{I}(B)$ kein größtes Element hat. Es sei für alle $\xi < \mathcal{S}$ a_ξ ein Element aus K^+ mit $\mathcal{I}(a_\xi) = \gamma_\xi$. Offensichtlich ist dann $(a_\xi + B)_{\xi < \mathcal{S}}$ eine streng monoton fallende Folge in $(K/B)^+$ und zudem mit $(K/B)^+$ koinitial. Aus der Regularität von λ bzw. $\mathcal{S}$ folgt hiermit: $\mathcal{S} = \lambda$.

(a) $\Leftrightarrow$ (d): Sei $\mathcal{S}$ die reguläre Länge der pseudokonvergenzen Folge $(a_\xi)_{\xi < \mathcal{S}}$. Dann ist $(a_\xi + B)_{\xi < \mathcal{S}}$ die zugehörige Cauchyfolge in K/B , und es muß folglich $\mathcal{S} \geq \lambda$ sein. Die Folge $(k'_\xi)_{\xi < \lambda}$ sei wie oben definiert. Dann kann man eine Teilfolge $(b_\delta + B)_{\delta < \mathcal{S}}$ von $(a_\xi + B)_{\xi < \mathcal{S}}$ folgendermaßen konstruieren: Zu jedem $\delta < \mathcal{S}$ sei $b_\delta + B = a_\delta + B$, falls für das Folgenglied $a_\delta + B$ gilt: Für alle ξ mit $\delta < \xi < \mathcal{S}$ ist $|(a_\xi - a_\delta) + B| < k'_\delta$. $(b_\delta + B)_{\delta < \mathcal{S}}$ ist als Teilfolge von $(a_\xi + B)_{\xi < \mathcal{S}}$ eine Cauchyfolge in K/B und somit muß $\mathcal{S} = \lambda$ sein.

An dieser Stelle möchten wir noch eine Bemerkung an=

schließen, die wir auch noch zum Beweis von Satz (5.1) benötigen.

(4.3) Bemerkung:

Es sei G eine angeordnete abelsche Gruppe ohne ein kleinstes positives Element. Der Koinitialitätstyp von G sei λ , und (S,D) sei ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in G . Dann gilt:

$$\text{char } (S,D) = \begin{cases} (\lambda, \lambda), & \text{falls } (S,D) \text{ von keinem Element aus } G \text{ bestimmt wird;} \\ (\lambda, 1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis:

Wird (S,D) von keinem Element aus G bestimmt, so erhält man die obige Aussage aus Lemma (4.2) für den Spezialfall $B = (0)$.

Sei also g ein Element aus G , welches (S,D) bestimmt. Dann ist g das kleinste Element von D , und es gilt: $S = \{x \in G : x < g\}$ und $D = \{x \in G : x \geq g\}$. Dann ist $\text{char } (S,D) = (\delta, 1)$, wobei δ eine reguläre Ordinalzahl ungleich 1 ist. Analog zum Beweis von Lemma (4.2): $(a) \Leftrightarrow (c)$ kann man aber zeigen, daß gilt: $\delta = \lambda$.

$(E_\xi)_\xi$ sei wieder die anfangs konstruierte Folge von unmittelbaren Erweiterungen von K bezüglich f . Dann gilt folgendes Lemma:

(4.4) Lemma:

Ist λ eine reguläre Ordinalzahl ungleich 1, so enthält E_λ nur solche freien, B -eigentlichen B -Schnitte bezüglich f , deren Charakter (λ, λ) ist.

Beweis:

Sei (S,D) ein freier, B -eigentlicher B -Schnitt in E_λ . Wir

wollen zeigen, daß es dann keine Ordinalzahl $\xi < \lambda$ gibt, für welche sowohl $(S \cap E_\xi)$ mit S konfinal als auch $(D \cap E_\xi)$ mit D koinitial ist. Angenommen es gäbe eine solche Ordinalzahl $\xi < \lambda$, dann wäre offensichtlich der dedekindsche Schnitt $(S \cap E_\xi, D \cap E_\xi)$ schon ein freier, B' -eigentlicher B' -Schnitt ($B' := B \cap E_\xi$) in E_ξ und müßte als solcher in $E_{\xi+1}$ bereits vervollständigt worden sein. Also müßte in $E_{\xi+1}$ ein Element t existieren, für das nach Satz (1.22) gilt: $(S \cap E_\xi) < t < (D \cap E_\xi)$. Damit wäre aber, im Widerspruch zur Annahme, t ein Element von E_λ mit $S < t < D$. Wir können daher folgendes aussagen:

- (1) Mindestens eine der beiden folgenden Aussagen ist für den dedekindschen Schnitt (S, D) richtig:
 - a) Für alle $\xi < \lambda$ ist $(S \cap E_\xi)$ nicht mit S konfinal.
 - b) Für alle $\xi < \lambda$ ist $(D \cap E_\xi)$ nicht mit D koinitial.

Wir nehmen nun o.B.d.A. an, daß a) gilt. Dann erhält man:

- (2) Für alle $\delta < \lambda$ gibt es ein η mit $\delta < \eta < \lambda$, für welches $(S \cap E_\delta)$ nicht mit $(S \cap E_\eta)$ konfinal ist.

Man kann durch die folgende Definition eine Ordnungsrelation auf der Menge der unteren Klassen $(S \cap E_\xi)$ einführen:

- (3) $(S \cap E_\delta) \prec' (S \cap E_\mu) : \quad \text{es ist } \delta < \mu \text{ und } (S \cap E_\delta) \text{ nicht mit } (S \cap E_\mu) \text{ konfinal.}$

Dann folgt aus der Aussage (2), daß eine bezüglich " $\prec'$ " streng monoton steigende Teilfolge $(S \cap E_{\xi_s})_{s < \lambda}$ von $(S \cap E_\xi)_{\xi < \lambda}$ existiert. Wir definieren eine Folge $(y_s)_{s < \lambda}$, indem wir für $s < \lambda$ y_s beliebig aus $(S \cap E'_s) \setminus \bigcup_{\delta < s} (S \cap E'_\delta)$ wählen. Dann ist $(y_s)_{s < \lambda}$ eine in E_λ streng monoton steigende Folge, die mit S konfinal ist. Der Konfinalitätstyp von S ist damit λ . Da (S, D) ein freier, B -eigentlicher B -Schnitt ist, folgt daher mit Lemma (4.2): $\text{char}(S, D) = (\lambda, \lambda)$.

Mit Lemma (4.4) kann man jetzt den folgenden Satz beweisen.

(4.5) Satz:

Sei K ein angeordneter Körper mit der ordnungsverträglichen Bewertung φ . Hat die Wertegruppe T_φ die Kardinalität $\aleph_\alpha$, so ist $E_{\omega_{\alpha+1}}$ eine maximale unmittelbare Erweiterung von K .

Beweis:

Nach Satz (1.20) ist lediglich zu zeigen, daß in $E_{\omega_{\alpha+1}}$ keine freien, B-eigentlichen B-Schnitte existieren. Da $\alpha+1$ keine Limesordinalzahl ist, muß $\omega_{\alpha+1}$ eine reguläre Ordinalzahl sein. Nehmen wir an, $E_{\omega_{\alpha+1}}$ enthielte einen freien, B-eigentlichen B-Schnitt (S, D) . Nach Lemma (4.4) ist dann $\text{char}(S, D) = (\omega_{\alpha+1}, \omega_{\alpha+1})$. Weiter ist damit nach Lemma (4.2) der Konfinalitätstyp von $T_\varphi \setminus \varphi(B)$ gleich $\omega_{\alpha+1}$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $|T_\varphi| = \aleph_\alpha$ ist.

In Abwandlung der Eigenschaft "maximal bewertet" kann man definieren: Ist $\alpha > 0$ eine Ordinalzahl, so nennen wir einen mit φ bewerteten Körper K " α -maximal", falls jede pseudokonvergente Folge aus K , deren Länge $\leq$ echt kleiner als ω_α ist, in K einen Pseudolimes besitzt. Man kann damit den folgenden Satz beweisen.

(4.6) Satz:

Sei K ein angeordneter Körper mit der ordnungsverträglichen Bewertung φ , und sei ω_α eine reguläre Anfangszahl. Dann ist die unmittelbare Erweiterung E_{ω_α} von K α -maximal.

Beweis:

Wegen Lemma (4.2) und Satz (1.20) in der Terminologie

der B-Schnitte hat man die folgende, zur α -Maximalität äquivalente Aussage: Es existieren in K keine freien, B-eigentlichen B-Schnitte (S, D) mit $\text{char}(S, D) = (\lambda, \lambda)$ und $\lambda < \omega_\alpha$. Da ω_α eine reguläre Ordinalzahl ist, enthält E_{ω_α} nach Lemma (4.4) nur freie, B-eigentliche B-Schnitte (S, D) mit $\text{char}(S, D) = (\omega_\alpha, \omega_\alpha)$.

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß die B-Erweiterung E_1 von K im allgemeinen noch nicht die maximale unmittelbare Erweiterung von K ist. Hierzu konstruieren wir das folgende Beispiel:

Es seien $\alpha < \beta$ zwei Ordinalzahlen, die beide einen direkten Vorgänger haben. Dann sei K ein beliebiger, angeordneter Körper und T eine teilbare γ_β -Gruppe (wird nachfolgend auf Seite 70 definiert). Damit ist insbesondere $|T| \geq \aleph_\beta$, und wir definieren H als den angeordneten, maximal o-bewerteten Körper $H(T, K)$ der formalen Potenzreihen auf T mit Koeffizienten aus K .

Wie man leicht sieht, sind $H_\alpha := \{f \in H : |s(f)| < \aleph_\alpha\}$ und $H_\beta := \{f \in H : |s(f)| < \aleph_\beta\}$ Unterkörper von H ; dabei muß, da T nach Voraussetzung eine γ_β -Gruppe ist, H_β ein echter Unterkörper von H sein. Es soll nun gezeigt werden, daß H_β die B-Erweiterung von H_α o-isomorph enthält, daß also die maximale unmittelbare Erweiterung H von H_α nicht mit der B-Erweiterung von H_α identisch ist. Hierzu zeigen wir zuerst, daß jede pseudokonvergente Folge aus H_α in H_β einen Pseudolimes besitzt.

Ist $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ eine pseudokonvergente Folge aus H_α mit $\gamma(a_\xi) < \gamma(a_\delta)$ für alle ξ, δ mit $\xi < \delta < \zeta$, so ist jedes Element der Breite von $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$, also insbesondere $0 \in H_\alpha$, ein Pseudolimes dieser Folge. Wir können uns daher auf die pseudokonvergenten Folgen $(a_\xi)_{\xi < \zeta}$ aus H_α beschränken, für welche die Folge $(\gamma(a_\xi))_{\xi < \zeta}$ konstant wird. Wir kön-

nen nun o.B.d.A. annehmen, daß $f(a_\xi) = f(a_\delta)$ für alle ξ, δ mit $\xi < \delta < \zeta$ ist. Da für alle Ordinalzahlen ξ, δ mit $\xi < \delta < \zeta$ $f(a_\delta - a_\xi) < f(a_{\delta+1} - a_\delta)$ ist, müssen $a_{\delta+1}$ und a_δ über einem Anfangsstück Σ ihres Trägers übereinstimmen, dessen Kardinalität $|\Sigma|$ dieselbe wie die der Ordinalzahl δ ist. Aus der Definition von H_α folgt damit: Die Länge $\mathfrak{s}$ unserer pseudokonvergenten Folge $(a_\xi)_{\xi < \mathfrak{s}}$ ist kleiner oder gleich ω_α . Damit ist aber ein Pseudolimes $a \in H$ von $(a_\xi)_{\xi < \mathfrak{s}}$ lediglich über einem Anfangsstück seines Trägers, dessen Kardinalität kleiner oder gleich $\aleph_\alpha$ ist, durch die Folgenglieder a_ξ eindeutig bestimmt; letzteres in dem Sinn, daß für alle γ aus diesem Anfangsstück $a(\gamma) = a_\eta(\gamma)$ für genügend großes $\eta < \mathfrak{s}$ sein muß. Folglich existiert zu jeder pseudokonvergenten Folge aus H_α wegen $\alpha < \beta$ ein Pseudolimes in H_β . Damit kann man die B-Erweiterung von H_α in H_β folgendermaßen konstruieren: Man adjungiert zuerst zu allen pseudokonvergenten Folgen transzendenten Typs aus H_α einen Pseudolimes aus H_β . Man erhält auf diese Weise einen Unterkörper von H_β , über welchem die B-Vervollständigung von H_α algebraisch ist. Da $\mathbb{T}$ teilbar ist, ist andererseits H_β reell-abgeschlossen¹⁾ und muß folglich die B-Erweiterung von H_α enthalten.

¹⁾ siehe Lit. [2], Seite 351, Corollary 3.2.

§5 EIN BEWEIS DES ALLINGSCHEN CHARAKTERISIERUNGS-
SATZES FÜR η_α -GRUPPEN.

Da sich die Definitionen der T_f -Untergruppe, des B-Schnittes und der B-Eigentlichkeit lediglich auf die additive Struktur des Körpers bzw. die Ordnungsstruktur der Wertegruppe beziehen, kann man diese Terminologie auf nicht diskret angeordnete abelsche Gruppen mit ihrer natürlichen Bewertung V übertragen. Insbesondere gelten auch die in Lemma (1.16) angeführten Beziehungen zwischen den bezüglich V pseudokonvergenten Folgen mit der Breite B und den B-eigentlichen B-Schnitten, sowie das Lemma (1.19). Wie man leicht sieht, läßt sich auch das Lemma (4.2) direkt auf angeordnete abelsche Gruppen mit natürlicher Bewertung übertragen.

Unter einer η_α -Gruppe versteht man eine angeordnete abelsche Gruppe, die bezüglich ihrer Ordnungsstruktur eine η_α -Menge ist ($\alpha > 0$ sei dabei eine Ordinalzahl). Die Definition einer η_α -Menge geht auf F. Hausdorff zurück¹⁾ und lautet: Eine angeordnete Menge X ist eine η_α -Menge, falls sowohl ihr Konfinalitätstyp als auch ihr Koinitialitätstyp größer oder gleich ω_α ist und für jeden dedekindschen Schnitt (S, D) in X mit $\text{char}(S, D) = (\xi_1, \xi_2)$ gilt: $\xi_1 + \xi_2 \geq \omega_\alpha$.

Es soll nun der folgende, von N.L. Alling bewiesene Charakterisierungssatz für η_α -Gruppen²⁾ mit einem einfacheren und verkürzten Beweis gezeigt werden.

(5.1) Satz: (Alling)

Es sei G eine angeordnete abelsche Gruppe, V ihre natürliche Bewertung und α eine Ordinalzahl größer 0. Gelten dann die drei folgenden Bedingungen:

1) siehe Lit. [5]

2) siehe Lit. [2], Main Theorem, S. 342 ff.

- (1) Jeder Faktor G^γ/G_γ ($\gamma \in T$) ist entweder zur additiven Gruppe der reellen Zahlen oder zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen o-isomorph;
- (2) $T := T_V$ ist eine η_α -Menge;
- (3) die natürliche Bewertung V ist auf G α -maximal, so ist G eine η_α -Gruppe.

Dabei versteht man für ein beliebiges $\gamma \in T$ unter G^γ bzw. G_γ die konvexen Untergruppen $G^\gamma := \{g \in G : V(g) \geq \gamma\}$ und $G_\gamma := \{g \in G : V(g) > \gamma\}$. Offensichtlich ist dann G_γ eine maximale konvexe Untergruppe von G^γ , und folglich ist die Faktorgruppe G^γ/G_γ , die wir mit "Faktor" bezeichnen, durch ihre induzierte Anordnung archimedisch angeordnet. Nach dem Satz von Hölder ist sie damit zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen o-isomorph. Die α -Maximalität besagt, daß jede bezüglich V pseudokonvergente Folge aus G mit einer Länge $\lambda < \omega_\alpha$ in G einen Pseudolimes besitzt. Wie schon bemerkt, heißt dies in der Terminologie der B-Schnitte, daß in G kein freier, B-eigentlicher B-Schnitt (S, D) mit $\text{char}(S, D) = (\lambda, \lambda)$ und $\lambda < \omega_\alpha$ existiert.

Die Umkehrung von Satz (5.1) gilt ebenfalls und läßt sich wesentlich einfacher zeigen.

Beweis von Satz (5.1):

Angenommen, die Gruppe G erfüllt die Bedingungen (1) bis (3) und ist keine η_α -Menge. Dann existiert ein dedekindscher Schnitt (S, D) in G mit $\text{char}(S, D) = (\xi_1, \xi_2)$ und $\xi_1 + \xi_2 < \omega_\alpha$. Aus Lemma (4.2) (a) $\Leftrightarrow$ (c) folgt, daß der Koinitialitätstyp λ von G gleich dem Konfinalitätstyp von T ist, und da T nach Voraussetzung eine η_α -Menge ist, muß $\lambda \geq \omega_\alpha$ sein. Hieraus folgt zusammen mit Bemerkung (4.3):

$\mathbb{S}_1 \neq 1 \neq \mathbb{S}_2$, d.h. D hat kein kleinstes und S kein größtes Element.

Es sei $B := \bigcup_{\gamma \in \Sigma} G^\gamma$, wobei $\Sigma := \{\gamma \in \Gamma : S + G^\gamma = S\}$ sei. Dann wollen wir die folgende Behauptung nachweisen:

(A) $\Gamma_V \setminus V(B)$ hat kein größtes Element, d.h. B ist eine Γ_V -Untergruppe von G .

Angenommen, γ_0 ist das größte Element von $\Gamma \setminus V(B)$. Aus der Definition von B folgt dann, daß es ein Endstück S' von S und ein Anfangsstück D' von D gibt, für welche gilt:

$$V(d' - s') = \gamma_0 \quad \wedge s' \in S', \quad \wedge d' \in D'.$$

Ansonsten wäre nämlich $S + G^{\gamma_0} = S$ und andererseits B eine echte Teilmenge von G^{γ_0} , was der Definition von B widerspricht. Sei nun $s_0 \in S'$ fest gewählt, dann definieren wir in $G^{\gamma_0}/G_{\gamma_0}$ die beiden Teilmengen:

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{r + G_{\gamma_0} : \forall s \in S' : s \geq s_0 \wedge (s - s_0) + G_{\gamma_0} \geq r + G_{\gamma_0}\} \\ D_2 &:= \{r + G_{\gamma_0} : \forall d \in D' : (d - s_0) + G_{\gamma_0} \leq r + G_{\gamma_0}\}. \end{aligned}$$

Sicher kann $D_1 \cap D_2$ aus höchstens einem Element bestehen, und wir zeigen, daß diese Menge aus genau einem Element besteht. Dazu nehmen wir an, es sei $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Dann ist (D_1, D_2) ein dedekindscher Schnitt in $G^{\gamma_0}/G_{\gamma_0}$. Da $G^{\gamma_0}/G_{\gamma_0}$ entweder zu $(\mathbb{R}, +)$ oder zu $(\mathbb{Z}, +)$ o-isomorph ist, gibt es ein Element $t + G_{\gamma_0}$ aus $G^{\gamma_0}/G_{\gamma_0}$, welches (D_1, D_2) bestimmt. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{r + G_{\gamma_0} \in G^{\gamma_0}/G_{\gamma_0} : r + G_{\gamma_0} < t + G_{\gamma_0}\} \\ D_2 &= \{r + G_{\gamma_0} \in G^{\gamma_0}/G_{\gamma_0} : r + G_{\gamma_0} \geq t + G_{\gamma_0}\}. \end{aligned}$$

Also gibt es ein Anfangsstück D^* von D , so daß gilt:

$$(d - s_0) + G_{\gamma_0} = t + G_{\gamma_0} \quad \wedge d \in D^*.$$

Jedes Element $d \in D^*$ läßt sich damit in der Form $d = (t + s_0) + b$ mit $b \in G_{\gamma_0}$ darstellen, und jedes Element

dieser Form liegt in D^* . Folglich ist der Koinitialitätstyp von D gleich dem von B . Andererseits ist T nach Voraussetzung eine η_α -Menge und $T \setminus V(B)$ besitzt ein größtes Element γ_0 , daher muß der Koinitialitätstyp von $V(B)$ ungleich 1 und insbesondere größer oder gleich ω_α sein. Dann ist dieser aber gleich dem von B und nach obigem müßte der Koinitialitätstyp ξ_2 von D größer oder gleich ω_α sein. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu der Annahme: $\xi_1 + \xi_2 < \omega_\alpha$. Folglich existiert ein Element $r_0 + G_{\gamma_0}$ aus $G_{\gamma_0} / G_{\gamma_0}$ mit $D_1 \cap D_2 = r_0 + G_{\gamma_0}$. Damit gibt es ein $s \in S$ und ein $d \in D$ mit $(s - s_0) + G_{\gamma_0} = (d - s_0) + G_{\gamma_0}$, d.h. es gibt ein $s \in S$ und ein $d \in D$ mit $(d - s) \in G_{\gamma_0}$. Dann ist $V(d - s) > \gamma_0$, und wir erhalten $S + G_{\gamma_0} \neq S$, was ein Widerspruch zu der Annahme, γ_0 sei das größte Element von $T \setminus V(B)$, ist. Damit ist die Aussage (A) bewiesen, d.h. B ist eine T_V -Untergruppe von G und folglich (S, D) ein B -Schnitt in G .

Es soll jetzt noch gezeigt werden, daß (S, D) sogar ein B -eigentlicher B -Schnitt in G ist. Nehmen wir an, zu einem vorgegebenen $g \in G$ mit $g > B$ gibt es keine Elemente $s \in S$ und $d \in D$ mit $(d - s) < g$. Dann ist für $\gamma := V(g)$ sicher $S + G_\gamma = S$. Da g aber nicht in B liegt und, wie oben gezeigt, $T \setminus V(B)$ kein größtes Element besitzt, ist dies ein Widerspruch zur Definition von B . Also ist (S, D) ein B -eigentlicher B -Schnitt in G . Als solcher kann er in G frei sein oder nicht.

Fall 1): (S, D) ist in G nicht frei. Dann existiert in G ein definierendes Element g' von (S, D) , d.h. $g' + B$ ist ein Anfangsstück von D . Ist (S', D') das Bild von (S, D) unter dem kanonischen Epimorphismus von G auf G/B , so ist (S', D') nach Lemma (1.7) ein eigentlicher dedekindscher Schnitt in G/B . Insbesondere hat S' kein größtes Element und somit ist der Konfinalitätstyp von S gleich

dem von S' . Dieser ist nach Bemerkung (4.3) gleich dem Koinitialitätstyp von $(G/B)^+$, welcher nach Lemma (4.2) gleich dem Konfinalitätstyp von $T \setminus V(B)$ ist. Nach unserer Annahme war der Konfinalitätstyp von S $\xi_1 < \omega_\alpha$. Da T nach Voraussetzung eine η_α -Menge ist, muß somit der Koinitialitätstyp von $V(B)$ größer oder gleich ω_α sein. Dieser ist aber, da $V(B)$ kein kleinstes Element hat, gleich dem Koinitialitätstyp von B und folglich gleich dem von D , denn $g+B$ ist ein Anfangsstück von D . Also ist in diesem Fall, im Widerspruch zur Annahme, $\xi_2 \geq \omega_\alpha$.

Fall 2): (S, D) ist in G frei. Dann ist $\xi_1 = \xi_2 =: \lambda < \omega_\alpha$. Dies ist aber, unter Berücksichtigung von Lemma (1.16), ein Widerspruch zur α -Maximalität von G .

Damit ist gezeigt, daß $\xi_1 + \xi_2 \geq \omega_\alpha$ sein muß, und da der Konfinalitätstyp bzw. der Koinitialitätstyp der angeordneten Menge G gleich dem Koinitialitätstyp der η_α -Menge T ist, gilt: G ist eine η_α -Menge.

LITERATURVERZEICHNIS:

- [1] N.L. Alling; A characterization of Abelian η_α -groups in terms of their natural valuation, Proc. Nat. Acad. Sci. of the U.S.A. 47 (1961), S. 711-713.
- [2] N.L. Alling; On the existence of real-closed fields that are η_α -sets of power $\aleph_\alpha$, Tr. AMS 103 (1962), S. 341-352.
- [3] R. Baer; Dichte, Archimedizität und Starrheit geordneter Körper, Math. Ann. 188 (1970), S. 165-205.
- [4] P. Conrad and J. Dauns; An embedding theorem for lattice-ordered fields, Pacific J. of Math., Vol. 30, No. 2 (1969), S. 385-398.
- [5] F. Hausdorff; Grundzüge der Mengenlehre, Chelsea Publishing Company, New York 1965.
- [6] I. Kaplansky; Maximal fields with valuations, Duke J., Vol. 9 (1942), S. 303-321.
- [7] K. Knopp; Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 5. Auflage, 1964, Springer Verlag.
- [8] W. Krull; Allgemeine Bewertungstheorie, J. Reine Angew. Math. 167 (1932), S.160-196.
- [9] S. MacLane; Subfields and automorphism groups of p-adic fields, Ann. of Math., Vol. 40 (1939), S. 423-442.
- [10] A. Ostrowski; Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Math. Z. 39 (1935), S. 269-404.

- [11] R.v. Chossy und S. Priess-Crampe; Ordnungsverträgliche Bewertungen eines angeordneten Körpers, Arch. Math. 26 (1975), S. 372-387.
- [12] O.F.G. Schilling; The theorie of valuations, published by the Amer. Math. Soc., New York 1950.

LEBENS LAUF

Name: Heinz-Jörg Hüper

Geburtsdatum: 26. Februar 1950

Geburtsort: Heidenheim/Brenz

Schulbildung: 1956-1960 Grundschule in Heidenheim
1960-1968 Hellenstein-Gymnasium
Heidenheim
1968 Abitur

Studium: 1968-1970 Mathematik an der Universität
Tübingen
1970-1972 Mathematik und Wirtschafts=
wissenschaften an der Universi=
tät Tübingen
1972-1973 Mathematik an der Universität
München

Abschlußprüfungen: 1972 Diplom in Mathematik, Universität
Tübingen

Berufliche
Tätigkeiten: Ab 1. Juli 1974 Verwalter einer wissen=
schaftlichen Assistentenstelle der
Universität München.
Wegen eines Architekturstudiums am
31. September 1976 auf eigenen Wunsch
ausgeschieden.





